Светлой памяти
Бориса Григорьевича Колодяжного

Ряд Фибоначчи: о существовании интересующей формулы (ч. 1)

В § 364 5-го издания „Математической смекалки“Б. А. Кордемского[1] можно прочесть такое, цитируем:

> „Обнаружено много интересных соотношений между числами ряда Фибоначчи:
> $$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$
> 1) Принцип образования членов этого ряда приводит к следующему соотношению между любыми его тремя рядом стоящими числами S_{n-2}, S_{n-1} и S_n:
> $$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$
> Эта формула даёт возможность по первым двум членам ряда установить его третий член, по второму и третьему — четвёртый, по третьему и четвёртому — пятый и т. д.
>
> 2) Интересно было бы уметь сразу получить любой член ряда S_n, зная лишь номер n его места. Оказывается, это вполне возможно, но здесь мы столкнемся с одной из удивительных неожиданностей, которые нередки в математике.
>
> Любой член ряда Фибоначчи — число целое, номер места — тоже число целое. Естественно было бы ожидать, что любой член ряда S_n получается в зависимости от номера n занимаемого им места при помощи действий только над целыми числами(например, как в прогрессиях). Но это не так. Не только целые числа, но даже все целые и дробные(рациональные) бессильны образовать интересующую нас формулу.
>
> Из затруднительного положения помогают выйти два иррациональных числа:
> $$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{и} \qquad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
> Вспомните, как эти же два числа обращали в нуль разность R между площадями прямоугольника и квадрата(см. решение задачи №363 на стр. 564). Поистине неожиданная встреча!
>
> Так вот, если n — номер места, то любой член S_n ряда Фибоначчи вы можете получить по формуле:
> $$S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}.“$$

Последняя формула в приведенной цитате названа *формулой Бине* в честь французского математика Ж. Ф. М. Бине (1786-1856), вывевшего её в начале XIX века.

Цель данной статьи — предъявить *интересующую нас формулу* и доказать её верность.

Итак, если n — номер места, то любой член S_n ряда Фибоначчи вы, читатель, можете получить по такой формуле:

$$S_n = S_{5k-m} = F_k \times$$
$$\times \left\{ \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{m+1}}{2}\right)\left(1\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}}{2}\right) - \tfrac{m}{4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{m}}{2}\right)\left(2\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2}\right)\right\} +$$
$$+ M_k \times \left\{ \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{m+1}}{2}\right)(4-m) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{m}}{2}\right)\left(4\tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)^{\left(\frac{m+4}{2}\right)}}{2} - m\right)\right\}, \quad (1)$$

или же, по сильно упрощенным формулам:

$$S_n = S_{5k-m}\left\{\begin{array}{ll} = S_{5k-4} = (-3)F_k + M_k, & \text{если } n = 1, 6, 11, \ldots; \\ = S_{5k-3} = 2F_k + M_k, & \text{если } n = 2, 7, 12, \ldots; \\ = S_{5k-2} = (-1)F_k + 2M_k, & \text{если } n = 3, 8, 13, \ldots; \\ = S_{5k-1} = F_k + 3M_k, & \text{если } n = 4, 9, 14, \ldots; \\ = S_{5k-0} = 0F_k + 5M_k, & \text{если } n = 5, 10, 15, \ldots, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $F_k = \underbrace{\left(0 + 11^{k-2} + 11^{k-4}C^1_{k-3} + 11^{k-6}C^2_{k-4} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right] \text{ слагаемых}}$,

$M_k = \underbrace{\left(11^{k-1} + 11^{k-3}C^1_{k-2} + 11^{k-5}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+1}{2}\right] \text{ слагаемых}}$;

$m = 0, 1, 2, 3, 4;\ \ k = 1, 2, \ldots, k;\ \ [b]$— целая часть числа b и $t^0 = 1$.

Чтобы доказать верность формул (2), равно как формулы (1), надобно предварительно доказать два соотношения, связывающие величины M_k, F_k, M_{k+1} и F_{k+1} , а именно:

$$F_{k+1} = M_k; \quad (3)$$
$$M_{k+1} = F_k + 11M_k. \quad (4)$$

Сразу докажем соотношения (3) и (4).

Доказательство соотношения (3): Имеем:

$$M_k = M_k + 0 = 0 + M_k =$$
$$= \underbrace{0}_{1-\text{ое слагаемое в } M_k+0} + \underbrace{\left(11^{k-1} + 11^{k-3}C^1_{k-2} + 11^{k-5}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\text{следующие } \left[\frac{k+1}{2}\right] \text{ слагаемых в } M_k+0} =$$
$$= \underbrace{\left(0 + 11^{k-1} + 11^{k-3}C^1_{k-2} + 11^{k-5}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{1+\left[\frac{k+1}{2}\right] \text{ слагаемых в } M_k+0} =$$
$$= \underbrace{\left(0 + 11^{(k+1)-2} + 11^{(k+1)-4}C^1_{(k+1)-3} + 11^{(k+1)-6}C^2_{(k+1)-4} + \ldots\right)}_{1+\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}+\frac{2}{2}\right] = \left[\frac{(k+1)+2}{2}\right] \text{ слагаемых в } F_{k+1}} = F_{k+1}. \ \square$$

Уместно заметить, что в целях уменьшения шумового сопровождения при доказательстве соотношения (4), применяются следующие общеизвестные свойства биномиальных коэффициентов[2], [3]:

а) $\quad C^p_{q+1} = C^{p-1}_q + C^p_q$;

б) $\quad C^q_q = C^0_q = 1$,

а ещё используются такие верные свойства целой части рациональных (в том числе целых) чисел:

в) *Есть* $[\frac{k+1}{2}] = [\frac{k+2}{2}] = \frac{k+1}{2}$, *если* $k-$ *нечетное* $\geqslant 1$
(ведь очевидно, что при $k = 2h - 1$ верна экспликация:
$[\frac{(2h-1)+2}{2}] = [h + \frac{1}{2}] = [$*цел. рац. ч.+нецел. рац. ч., что меньше* $1] =$
$= [h] + [\frac{1}{2}] = [h] = h = \frac{k+1}{2} =$*цел. положит. число*);

г) *Есть* $[\frac{k+1}{2}] = \frac{k}{2}$, *если* $k-$ *четное* > 0
(ведь очевидно, что при $k = 2h$ верна экспликация:
$[\frac{2h+1}{2}] = [h + \frac{1}{2}] = [$*цел. рац. ч.+нецел. рац. ч., что меньше* $1] =$
$= [h] + [\frac{1}{2}] = [h] = h = \frac{k}{2} =$*цел. положит. число*);

д) *Есть* $[\frac{k+2}{2}] = \frac{k}{2} + 1$, *если* $k-$ *четное* > 0
(ведь очевидно, что при $k = 2h$ верна экспликация:
$[\frac{2h+2}{2}] = [h + \frac{2}{2}] = [$*цел. рац. ч.+цел. рац. ч.*$] =$
$= [h] + [\frac{2}{2}] = h + 1 = \frac{k}{2} + 1 =$*цел. положит. число*).

Доказательство соотношения (4): Проведем его двумя раздельными этапами: на *первом* этапе полагается, что k нечетное $\geqslant 1$, на *втором* этапе — k четное $\geqslant 2$.

Первый этап: к частному случаю $k = 1$ применим метод прямой проверки; итак, с одной стороны, имеем:

$$F_1 + 11M_1 = \underbrace{(0 + 11^{1-2} + \ldots)}_{[\frac{1+2}{2}] = 1 \text{ слагаемое}} +$$

$$+11 \times \underbrace{(11^{1-1} + 11^{1-3}C^1_{1-2} + \ldots)}_{[\frac{1+1}{2}] = 1 \text{ слагаемое}} = 0 + 11 \times 1 = 11,$$

а с другой стороны, имеем:

$$M_2 = \underbrace{(11^{2-1} + 11^{2-3}C^1_{2-2} + \ldots)}_{[\frac{(1+1)+1}{2}] = [\frac{3}{2}] = 1 \text{ слагаемое в } M_{1+1}} = 11^1,$$

то есть, имеем: $M_2 = F_1 + 11M_1$.

Для частного случая ($k = 1$) соотношение (4) доказано.

При нечетных $k \geqslant 3$, с учетом свойств а), б) и в), далее имеем:

$$F_k + 11M_k = \underbrace{(0 + 11^{k-2} + 11^{k-4}C^1_{k-3} + 11^{k-6}C^2_{k-4} + \ldots)}_{[\frac{k+2}{2}] \text{ слагаемых}} +$$

$$+11 \times \underbrace{(11^{k-1} + 11^{k-3}C^1_{k-2} + 11^{k-5}C^2_{k-3} + \ldots)}_{[\frac{k+1}{2}] = [\frac{k+2}{2}] \text{ слагаемых}} =$$

$$= 0 + \underbrace{\left(11^{k-2} + 11^{k-4}C^1_{k-3} + 11^{k-6}C^2_{k-4} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых}} +$$

$$+ \underbrace{\left(11^{k-1+1} + 11^{k-3+1}C^1_{k-2} + 11^{k-5+1}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right] \text{ слагаемых}} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{k-2} \times 1 + 11^{k-4}C^1_{k-3} + 11^{k-6}C^2_{k-4} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых}} + 11^{k-1+1} +$$

$$+ \underbrace{\left(11^{k-3+1}C^1_{k-2} + 11^{k-5+1}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых}} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{(k+1)-3}C^0_{k-2} + 11^{(k+1)-5}C^1_{k-3} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых}} +$$

$$+ 11^{(k+1)-1} + \underbrace{\left(11^{(k+1)-3}C^1_{k-2} + 11^{(k+1)-5}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых}} =$$

$$= 11^{(k+1)-1} + \underbrace{\left\{11^{(k+1)-3}\left(C^0_{k-2} + C^1_{k-2}\right) + 11^{(k+1)-5}\left(C^1_{k-3} + C^2_{k-3}\right) + \ldots\right\}}_{\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых}} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{(k+1)-1} + 11^{(k+1)-3}C^1_{(k-2)+1} + 11^{(k+1)-5}C^2_{(k-3)+1} + \ldots\right)}_{1+\left[\frac{k+2}{2}\right]-1 \text{ слагаемых в } F_k + 11M_k} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{(k+1)-1} + 11^{(k+1)-3}C^1_{(k+1)-2} + 11^{(k+1)-5}C^2_{(k+1)-3} + \ldots\right)}_{\left[\frac{k+2}{2}\right] = \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right] \text{ слагаемых в } M_{k+1}} = M_{k+1},$$

то есть, имеем: $$M_{k+1} = F_k + 11M_k.$$

Таким образом, для всех нечетных k (для $k \geqslant 3$ и для $k = 1$) соотношение (4) доказано и значит первый этап доказательства завершен.

Второй этап: и здесь, к частному случаю $k = 2$ применим метод прямой проверки; итак, с одной стороны, имеем:

$$F_2 + 11M_2 = \underbrace{\left(0 + 11^{2-2} + \ldots\right)}_{\left[\frac{2+2}{2}\right]=2 \text{ слагаемых}} +$$

$$+ 11 \times \underbrace{\left(11^{2-1} + 11^{2-3}C^1_{2-2} + \ldots\right)}_{\left[\frac{2+1}{2}\right]=1 \text{ слагаемое}} = 0 + 11^0 + 11 \times 11^1 = 0 + 1 + 121 = 122,$$

а с другой стороны, имеем:

$$M_3 = \underbrace{\left(11^{3-1} + 11^{3-3}C^1_{3-2} + \ldots\right)}_{\left[\frac{(2+1)+1}{2}\right] = \left[\frac{4}{2}\right] = 2 \text{ слагаемых в } M_{2+1}} = 11^2 + 11^0C^1_1 = 121 + 1 \times 1 = 122,$$

то есть, имеем: $M_3 = F_2 + 11M_2$.

Для частного случая ($k = 2$) соотношение (4) доказано.

При четных $k \geqslant 4$, с учетом свойств а), б), г) и д), далее имеем:

$$F_k + 11M_k = \underbrace{\left(0 + 11^{k-2} \times 1 + 11^{k-4}C^1_{k-3} + 11^{k-6}C^2_{k-4} + \ldots\right)}_{[\frac{k+2}{2}] = \frac{k}{2}+1 \text{ слагаемых}} +$$

$$+11 \times \underbrace{\left(11^{k-1} + 11^{k-3}C^1_{k-2} + 11^{k-5}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{[\frac{k+1}{2}] = \frac{k}{2} \text{ слагаемых}} = \underbrace{0}_{\text{первое слагаемое в } F_k} +$$

$$+ \underbrace{\left(11^{k-2}C^0_{k-2} + 11^{k-4}C^1_{k-3} + \ldots\right)}_{\frac{k}{2}+1-2 = \frac{k}{2}-1 \text{ внутренних слагаемых в } F_k} + \underbrace{11^{k-k}C^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}_{\left(\frac{k}{2}-1\right)}}_{\text{последнее слагаемое в } F_k} +$$

$$+ \underbrace{\left(11^{(k-1)+1} + 11^{(k-3)+1}C^1_{k-2} + 11^{(k-5)+1}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\frac{k}{2} \text{ слагаемых в } 11M_k} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{(k+1)-3}C^0_{k-2} + 11^{(k+1)-5}C^1_{k-3} + \ldots\right)}_{\frac{k}{2}-1 \text{ внутренних слагаемых в } F_k} + \underbrace{1 \times 1}_{\text{последнее слагаемое в } F_k} +$$

$$+ \underbrace{11^{(k+1)-1}}_{\text{первое слагаемое в } 11M_k} + \underbrace{\left(11^{(k+1)-3}C^1_{k-2} + 11^{(k+1)-5}C^2_{k-3} + \ldots\right)}_{\text{остальные } \frac{k}{2}-1 \text{ слагаемых в } 11M_k} =$$

$$= \underbrace{11^{(k+1)-1}}_{\text{первое слагаемое в } F_k+11M_k} + \underbrace{1 \times 1}_{\text{последнее слагаемое в } F_k+11M_k} +$$

$$+ \underbrace{\left\{11^{(k+1)-3}\left(C^0_{k-2} + C^1_{k-2}\right) + 11^{(k+1)-5}\left(C^1_{k-3} + C^2_{k-3}\right) + \ldots\right\}}_{\frac{k}{2}-1 \text{ внутренних слагаемых в } F_k+11M_k} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{(k+1)-1} + 11^{(k+1)-3}C^1_{(k-2)+1} + 11^{(k+1)-5}C^2_{(k-3)+1} + \ldots + 1 \times 1\right)}_{\frac{k}{2}-1+2 = \frac{k}{2}+1 \text{ слагаемых в } F_k+11M_k \text{ с явно выписанным последним членом}} =$$

$$= \underbrace{\left(11^{(k+1)-1} + 11^{(k+1)-3}C^1_{(k+1)-2} + 11^{(k+1)-5}C^2_{(k+1)-3} + \ldots\right)}_{\frac{k}{2}+1 = [\frac{k+2}{2}] = [\frac{(k+1)+1}{2}] \text{ слагаемых в } M_{k+1}} = M_{k+1},$$

то есть, имеем: $M_{k+1} = F_k + 11M_k$.

Таким образом, для всех четных k (для $k = 2$ и для $k \geqslant 4$) соотношение (4) доказано и значит *второй* этап доказательства завершен. По результатам двух этапов заключаем: соотношение (4) верно при любом целом $k \geqslant 1$. $\square$

Вот теперь мы можем доказать, что формулы (2), равно как формула (1), дают точные значения S_n при любом фиксированном $n \geqslant 1$. Действительно, при $n = 1$ имеем:

$$S_1 = S_{5\times 1-4} = (-3)F_1 + M_1 = (-3) \times \underbrace{\left(0 + 11^{1-2} + \ldots\right)}_{[\frac{1+2}{2}] = 1 \text{ слагаемое}} +$$

$$+ \underbrace{\left(11^{1-1} + 11^{1-3}C^1_{1-2} + \ldots\right)}_{[\frac{1+1}{2}] = 1 \text{ слагаемое}} = (-3) \times 0 + 11^0 = 0 + 1 = 1;$$

при $n=2$ имеем:

$$S_2 = S_{5\times 1-3} = 2F_1 + M_1 = 2\times \underbrace{\left(0+11^{1-2}+\ldots\right)}_{[\frac{1+2}{2}]=1 \text{ слагаемое}} +$$

$$+\underbrace{\left(11^{1-1}+11^{1-3}C^1_{1-2}+\ldots\right)}_{[\frac{1+1}{2}]=1 \text{ слагаемое}} = 2\times 0 + 11^0 = 0+1 = 1.$$

Как видим, формулы (2) для первых двух членов S_1 и S_2 ряда Фибоначчи подтверждаются. Поскольку произвольный последующий член этого ряда получается как сумма двух предыдущих, то далее нет необходимости делать числовую проверку формул (2) в отдельных случаях; для их подтверждения в остальных случаях достаточно убедиться в справедливости всего лишь 5(пяти) соотношений, а именно:

$$S_{5k-2} = S_{5k-4} + S_{5k-3}, \tag{5}$$

$$S_{5k-1} = S_{5k-3} + S_{5k-2}, \tag{6}$$

$$S_{5k-0} = S_{5k-2} + S_{5k-1}, \tag{7}$$

$$S_{5(k+1)-4} = S_{5k-1} + S_{5k-0}, \tag{8}$$

$$S_{5(k+1)-3} = S_{5k-0} + S_{5(k+1)-4}. \tag{9}$$

Последовательно проверим соотношения (5)-(9).
Для (5) имеем:
$S_{5k-4} + S_{5k-3} = (-3)F_k + M_k + 2F_k + M_k = (-1)F_k + 2M_k = S_{5k-2}$;
для (6) имеем:
$S_{5k-3} + S_{5k-2} = 2F_k + M_k + (-1)F_k + 2M_k = F_k + 3M_k = S_{5k-1}$;
для (7) имеем:
$S_{5k-2} + S_{5k-1} = (-1)F_k + 2M_k + F_k + 3M_k = 0\times F_k + 5M_k = S_{5k-0}$.

Есть первый промежуточный результат: равенства (5), (6) и (7) верны при любом целом $k \geqslant 1$.

Продолжим процедуру. Используя соотношения (3) и (4),
для (8) имеем:
$S_{5k-1} + S_{5k-0} = F_k + 3M_k + 5M_k = F_k + 8M_k = F_k + 11M_k + (-3)M_k =$
$= (-3)F_{k+1} + F_k + 11M_k = (-3)F_{k+1} + M_{k+1} = S_{5(k+1)-4}$.
И напоследок, используя соотношение (3),
для (9) имеем:
$S_{5k-0} + S_{5(k+1)-4} = 0\times F_k + 5M_k + (-3)F_{k+1} + M_{k+1} =$
$= 5F_{k+1} + (-3)F_{k+1} + M_{k+1} = 2F_{k+1} + M_{k+1} = S_{5(k+1)-3}$.

Есть второй промежуточный результат: равенства (8) и (9) также верны при любом целом $k \geqslant 1$.

Таким образом, для каждого целого $n \geqslant 1$ верность формул (2), равно как формулы (1), доказана и, следовательно, основная цель статьи достигнута.

(продолжение следует…)

Литература.

1. Б. А. Кордемский. Математическая смекалка.–М.:Гос.-изд. физ.-мат. лит., 5-ое изд., 1958.
2. В. А. Успенский. Треугольник Паскаля.–М.: Наука, 2-ое изд., 1979.
3. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.–М.: Наука, 5-ое изд., 1984.

г. Харьков, 12 декабря 2005 г. А. Г. Егоров.
С 19 декабря 2008 года на этом сайте вторая часть одноименной статьи.