

Ряд Фибоначчи: о существовании интересующей формулы (ч. 2)

Эта статья является естественным продолжением еще не опубликованной, но уже обнародованной статьи „Ряд Фибоначчи: о существовании интересующей формулы (ч. 1)“ (далее [1]). Здесь же речь идет о новом способе вычисления членов ряда Фибоначчи S_n , начиная с S_6 , который не дал знать о себе в [1], но по критериям *затраты времени на нахождение ответа, количество операций над многозначными числами и объем вычислений* всё же оставляет далеко позади себя известный почти восемь веков способ, что ассоциируется с формулой:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad (10)^*$$

(* — нет причин для прерывания здесь нумерации формул из [1] — А. Е.).

Сперва покажем, что на самом деле формула (4) из [1] обладает интересной особенностью, т. е. способностью генерировать последовательность целых чисел, причем, два первых её члена уже известны [1] и равны, соответственно, 0 и 1. Действительно, в силу (3) из [1] имеем: $M_{k+1} = F_{k+2}$ и $M_k = F_{k+1}$, а сделав с их участием подстановки в (4) из [1], получим рекуррентное (возвратное) соотношение

$$F_{k+2} = F_k + 11F_{k+1}. \quad (11)$$

Далее, с помощью (3) из [1] с той же легкостью приводим формулы (2) из [1] к пригодному для вычислений виду:

$$S_n \left\{ \begin{array}{ll} = S_{5k-4} = F_{k-1} + 8F_k, & \text{если } n = 6, 11, \dots; \\ = S_{5k-3} = 2F_k + F_{k+1}, & \text{если } n = 7, 12, \dots; \\ = S_{5k-2} = F_{k-1} + 10F_k + F_{k+1}, & \text{если } n = 8, 13, \dots; \\ = S_{5k-1} = F_k + 3F_{k+1}, & \text{если } n = 9, 14, \dots; \\ = S_{5k-0} = 5F_{k+1}, & \text{если } n = 10, 15, \dots, \end{array} \right. \quad (12)$$

где $k \geq 2$

(в скобках отметим, что мы преднамеренно в (12) удалили числа 1, 2, 3, 4, 5 из списка значений n , а также, число 1 из области значений k ; проделано это для того, чтобы избежать неопределенности в формальной записи $F_{k-1} = F_0$, возникающей при $k = 1$).

Для подтверждения заявленного проделываются вычисления S_{27} , S_{40} , S_{48} , S_{64} и S_{86} по следующим установкам:

- а) каждое с применением (11) и соответствующей формулы в (12);
- б) каждое с применением формулы (10).

В обоих случаях подручными средствами являются ручка и чистый лист бумаги в клетку. В обоих случаях числа в ответах записываются в десятиричной системе счисления (важно помнить, что прочтение всех целых чисел, привязанных к случаю а), делается справа налево без учета имеющихся

верхних и нижних индексов – вы разберётесь как они появляются и как влияют на ответ). В обоих случаях ведётся хронометраж времени.

Ниже в заданном порядке представлены полные выкладки вычислений:

- S_{27} в таб. 1 по способу а) и в таб. 2 по способу б);
- S_{40} в таб. 3 по способу а) и в таб. 4 по способу б);
- S_{48} в таб. 5 по способу а) и в таб. 6 по способу б);
- S_{64} в таб. 7 по способу а) и в таб. 8 по способу б);
- S_{86} в таб. 9 по способу а) и в таб. 10 по способу б).

Для лучшего понимания каждая строка вычислений снабжена пояснительной записью с левой стороны.

Таблица 1. Вычисление S_{27} по способу а).

$F_1 =$	0
$F_2 =$	1
$F_3 = F_1 + 11F_2 =$	1 1
$F_4 = F_2 + 11F_3 =$	2 2 1
$F_5 = F_3 + 11F_4 =$	3 5 ¹ 3 ¹ 1
$F_6 = F_4 + 11F_5 =$	5 0 ₁ ¹ 0 5 1 ₁
$F_7 = F_5 + 11F_6 =$	8 0 4 6 6 1
$2F_6 =$	0 1 0 0 3
$S_{27} = 2F_6 + F_7 =$	8 1 4 6 9 1
Ответ: $S_{27} =$	1 9 6 4 1 8

Таблица 2. Вычисление S_{27} по способу б).

$S_1 =$	1
$S_2 =$	1
$S_3 = S_1 + S_2 =$	2
$S_4 = S_2 + S_3 =$	3
$S_5 = S_3 + S_4 =$	5
$S_6 = S_4 + S_5 =$	8
$S_7 = S_5 + S_6 =$	1 3
$S_8 = S_6 + S_7 =$	2 1
$S_9 = S_7 + S_8 =$	3 4
$S_{10} = S_8 + S_9 =$	5 5
$S_{11} = S_9 + S_{10} =$	8 ₁ 9
$S_{12} = S_{10} + S_{11} =$	1 ₁ 4 ₁ 4
$S_{13} = S_{11} + S_{12} =$	2 3 3
$S_{14} = S_{12} + S_{13} =$	3 ₁ 7 ₁ 7
$S_{15} = S_{13} + S_{14} =$	6 1 0
$S_{16} = S_{14} + S_{15} =$	9 8 7
$S_{17} = S_{15} + S_{16} =$	1 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 7
$S_{18} = S_{16} + S_{17} =$	2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 4
$S_{19} = S_{17} + S_{18} =$	4 1 ₁ 8 1

Продолжение таб. 2 на следующей странице

$S_{20} = S_{18} + S_{19} =$	6 7 ₁ 6 5
$S_{21} = S_{19} + S_{20} =$	1 0 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 6
$S_{22} = S_{20} + S_{21} =$	1 7 ₁ 7 1 1
$S_{23} = S_{21} + S_{22} =$	2 ₁ 8 ₁ 6 5 7
$S_{24} = S_{22} + S_{23} =$	4 ₁ 6 ₁ 3 ₁ 6 ₁ 8
$S_{25} = S_{23} + S_{24} =$	7 ₁ 5 0 2 ₁ 5
$S_{26} = S_{24} + S_{25} =$	1 2 1 3 ₁ 9 3
Ответ: $S_{27} = S_{25} + S_{26} =$	1 9 6 4 1 8

Таблица 3. Вычисление S_{40} по способу а).

$F_1 =$	0
$F_2 =$	1
$F_3 = F_1 + 11F_2 =$	1 1
$F_4 = F_2 + 11F_3 =$	2 2 1
$F_5 = F_3 + 11F_4 =$	3 5 ¹ 3 ¹ 1
$F_6 = F_4 + 11F_5 =$	5 0 ¹ 0 5 1
$F_7 = F_5 + 11F_6 =$	8 ¹ 0 4 6 ¹ 6 ¹ 1
$F_8 = F_6 + 11F_7 =$	3 ¹ 9 ¹ 4 ¹ 5 ¹ 4 ¹ 8 ¹ 1 ¹
$F_9 = F_7 + 11F_8 =$	1 3 8 ₁ 6 ₄ 6 ₃ 4 ₃ 0 ₂ 2
$S_{40} = 5F_9 =$	5 5 1 4 3 3 2 0 1
Ответ: $S_{40} =$	1 0 2 3 3 4 1 5 5

Таблица 4. Вычисление S_{40} по способу б).

$S_1 =$	1
$S_2 =$	1
$S_3 = S_1 + S_2 =$	2
$S_4 = S_2 + S_3 =$	3
$S_5 = S_3 + S_4 =$	5
$S_6 = S_4 + S_5 =$	8
$S_7 = S_5 + S_6 =$	1 3
$S_8 = S_6 + S_7 =$	2 1
$S_9 = S_7 + S_8 =$	3 4
$S_{10} = S_8 + S_9 =$	5 5
$S_{11} = S_9 + S_{10} =$	8 ₁ 9
$S_{12} = S_{10} + S_{11} =$	1 ₁ 4 ₁ 4
$S_{13} = S_{11} + S_{12} =$	2 3 3
$S_{14} = S_{12} + S_{13} =$	3 ₁ 7 ₁ 7
$S_{15} = S_{13} + S_{14} =$	6 1 0
$S_{16} = S_{14} + S_{15} =$	9 8 7
$S_{17} = S_{15} + S_{16} =$	1 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 7
$S_{18} = S_{16} + S_{17} =$	2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 4
$S_{19} = S_{17} + S_{18} =$	4 1 ₁ 8 1

Продолжение таб. 4 на следующей странице

$S_{20} = S_{18} + S_{19} =$	6 7 ₁ 6 5
$S_{21} = S_{19} + S_{20} =$	1 0 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 6
$S_{22} = S_{20} + S_{21} =$	1 7 ₁ 7 1 1
$S_{23} = S_{21} + S_{22} =$	2 ₁ 8 ₁ 6 5 7
$S_{24} = S_{22} + S_{23} =$	4 ₁ 6 ₁ 3 ₁ 6 ₁ 8
$S_{25} = S_{23} + S_{24} =$	7 ₁ 5 0 2 ₁ 5
$S_{26} = S_{24} + S_{25} =$	1 2 1 3 ₁ 9 3
$S_{27} = S_{25} + S_{26} =$	1 ₁ 9 6 4 ₁ 1 ₁ 8
$S_{28} = S_{26} + S_{27} =$	3 ₁ 1 ₁ 7 ₁ 8 1 1
$S_{29} = S_{27} + S_{28} =$	5 1 ₁ 4 ₁ 2 2 ₁ 9
$S_{30} = S_{28} + S_{29} =$	8 3 2 0 4 0
$S_{31} = S_{29} + S_{30} =$	1 ₁ 3 4 6 2 ₁ 6 9
$S_{32} = S_{30} + S_{31} =$	2 1 ₁ 7 ₁ 8 3 0 ₁ 9
$S_{33} = S_{31} + S_{32} =$	3 5 ₁ 2 ₁ 4 5 7 ₁ 8
$S_{34} = S_{32} + S_{33} =$	5 ₁ 7 0 2 ₁ 8 ₁ 8 ₁ 7
$S_{35} = S_{33} + S_{34} =$	9 2 2 ₁ 7 ₁ 4 ₁ 6 ₁ 5
$S_{36} = S_{34} + S_{35} =$	1 ₁ 4 ₁ 9 3 0 3 ₁ 5 2
$S_{37} = S_{35} + S_{36} =$	2 4 ₁ 1 5 7 ₁ 8 1 7
$S_{38} = S_{36} + S_{37} =$	3 ₁ 9 0 ₁ 8 ₁ 8 1 6 ₁ 9
$S_{39} = S_{37} + S_{38} =$	6 ₁ 3 2 ₁ 4 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 6
Ответ: $S_{40} = S_{38} + S_{39} =$	1 0 2 3 3 4 1 5 5

Таблица 5. Вычисление S_{48} по способу а).

$F_1 =$	0
$F_2 =$	1
$F_3 = F_1 + 11F_2 =$	1 1
$F_4 = F_2 + 11F_3 =$	2 2 1
$F_5 = F_3 + 11F_4 =$	3 5 ¹ 3 ¹ 1
$F_6 = F_4 + 11F_5 =$	5 0 ¹ 0 5 1
$F_7 = F_5 + 11F_6 =$	8 ¹ 0 4 6 ¹ 6 ¹ 1
$F_8 = F_6 + 11F_7 =$	3 ¹ 9 ¹ 4 ¹ 5 ¹ 4 ¹ 8 ¹ 1 ¹
$F_9 = F_7 + 11F_8 =$	1 3 ¹ 8 ¹ 6 ² 6 ¹ 4 ¹ 0 2
$F_{10} = F_8 + 11F_9 =$	4 3 ¹ 6 ¹ 0 ¹ 8 ¹ 9 ² 6 ¹ 2 ¹ 2
$F_{11} = F_9 + 11F_{10} =$	5 0 8 3 ₁ 5 ₁ 2 ₁ 7 ₁ 1 ₁ 5 ₁ 2
$S_{48} = F_9 + 10F_{10} + F_{11} =$	6 7 9 6 2 5 7 0 8 4
Ответ: $S_{48} =$	4 8 0 7 5 2 6 9 7 6

Таблица 6. Вычисление S_{48} по способу б).

$S_1 =$	1
$S_2 =$	1
$S_3 = S_1 + S_2 =$	2
$S_4 = S_2 + S_3 =$	3

Продолжение таб. 6 на следующей странице

$S_5 = S_3 + S_4 =$	5
$S_6 = S_4 + S_5 =$	8
$S_7 = S_5 + S_6 =$	1 3
$S_8 = S_6 + S_7 =$	2 1
$S_9 = S_7 + S_8 =$	3 4
$S_{10} = S_8 + S_9 =$	5 5
$S_{11} = S_9 + S_{10} =$	8 ₁ 9
$S_{12} = S_{10} + S_{11} =$	1 ₁ 4 ₁ 4
$S_{13} = S_{11} + S_{12} =$	2 3 3
$S_{14} = S_{12} + S_{13} =$	3 ₁ 7 ₁ 7
$S_{15} = S_{13} + S_{14} =$	6 1 0
$S_{16} = S_{14} + S_{15} =$	9 8 7
$S_{17} = S_{15} + S_{16} =$	1 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 7
$S_{18} = S_{16} + S_{17} =$	2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 4
$S_{19} = S_{17} + S_{18} =$	4 1 ₁ 8 1
$S_{20} = S_{18} + S_{19} =$	6 7 ₁ 6 5
$S_{21} = S_{19} + S_{20} =$	1 0 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 6
$S_{22} = S_{20} + S_{21} =$	1 7 ₁ 7 1 1
$S_{23} = S_{21} + S_{22} =$	2 ₁ 8 ₁ 6 5 7
$S_{24} = S_{22} + S_{23} =$	4 ₁ 6 ₁ 3 ₁ 6 ₁ 8
$S_{25} = S_{23} + S_{24} =$	7 ₁ 5 0 2 ₁ 5
$S_{26} = S_{24} + S_{25} =$	1 2 1 3 ₁ 9 3
$S_{27} = S_{25} + S_{26} =$	1 ₁ 9 6 4 ₁ 1 ₁ 8
$S_{28} = S_{26} + S_{27} =$	3 ₁ 1 ₁ 7 ₁ 8 1 1
$S_{29} = S_{27} + S_{28} =$	5 1 ₁ 4 ₁ 2 2 ₁ 9
$S_{30} = S_{28} + S_{29} =$	8 3 2 0 4 0
$S_{31} = S_{29} + S_{30} =$	1 ₁ 3 4 6 2 ₁ 6 9
$S_{32} = S_{30} + S_{31} =$	2 1 ₁ 7 ₁ 8 3 0 ₁ 9
$S_{33} = S_{31} + S_{32} =$	3 5 ₁ 2 ₁ 4 5 7 ₁ 8
$S_{34} = S_{32} + S_{33} =$	5 ₁ 7 0 2 ₁ 8 ₁ 8 ₁ 7
$S_{35} = S_{33} + S_{34} =$	9 2 2 ₁ 7 ₁ 4 ₁ 6 ₁ 5
$S_{36} = S_{34} + S_{35} =$	1 ₁ 4 ₁ 9 3 0 3 ₁ 5 2
$S_{37} = S_{35} + S_{36} =$	2 4 ₁ 1 5 7 ₁ 8 1 7
$S_{38} = S_{36} + S_{37} =$	3 ₁ 9 0 ₁ 8 ₁ 8 1 6 ₁ 9
$S_{39} = S_{37} + S_{38} =$	6 ₁ 3 2 ₁ 4 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 6
$S_{40} = S_{38} + S_{39} =$	1 0 2 3 3 ₁ 4 ₁ 1 ₁ 5 ₁ 5
$S_{41} = S_{39} + S_{40} =$	1 6 5 5 ₁ 8 0 1 4 1
$S_{42} = S_{40} + S_{41} =$	2 ₁ 6 ₁ 7 ₁ 9 1 4 2 ₁ 9 6
$S_{43} = S_{41} + S_{42} =$	4 ₁ 3 ₁ 3 ₁ 4 ₁ 9 4 4 ₁ 3 ₁ 7
$S_{44} = S_{42} + S_{43} =$	7 0 1 4 ₁ 0 ₁ 8 ₁ 7 3 ₁ 3
$S_{45} = S_{43} + S_{44} =$	1 1 3 4 ₁ 9 0 ₁ 3 1 ₁ 7 0
$S_{46} = S_{44} + S_{45} =$	1 8 3 ₁ 6 ₁ 3 1 1 ₁ 9 0 3
$S_{47} = S_{45} + S_{46} =$	2 ₁ 9 ₁ 7 1 2 1 5 0 7 3
Ответ: $S_{48} = S_{46} + S_{47} =$	4 8 0 7 5 2 6 9 7 6

Таблица 7. Вычисление S_{64} по способу а).

$F_1 =$	0
$F_2 =$	1
$F_3 = F_1 + 11F_2 =$	1 1
$F_4 = F_2 + 11F_3 =$	2 2 1
$F_5 = F_3 + 11F_4 =$	3 5 ¹ 3 ¹ 1
$F_6 = F_4 + 11F_5 =$	5 0 ¹ 0 5 1
$F_7 = F_5 + 11F_6 =$	8 ¹ 0 4 6 ¹ 6 ¹ 1
$F_8 = F_6 + 11F_7 =$	3 ¹ 9 ¹ 4 ¹ 5 ¹ 4 ¹ 8 ¹ 1 ¹
$F_9 = F_7 + 11F_8 =$	1 3 ¹ 8 ¹ 6 ² 6 ¹ 4 ¹ 0 2
$F_{10} = F_8 + 11F_9 =$	4 3 ¹ 6 ¹ 0 ¹ 8 ¹ 9 ² 6 ¹ 2 ¹ 2
$F_{11} = F_9 + 11F_{10} =$	5 0 8 ¹ 3 ¹ 5 ¹ 2 ¹ 7 ¹ 1 ¹ 5 2
$F_{12} = F_{10} + 11F_{11} =$	9 ¹ 8 ¹ 4 ¹ 2 ¹ 7 ¹ 7 ¹ 6 ¹ 1 ¹ 9 ¹ 7 ¹ 2 ¹
$F_{13} = F_{11} + 11F_{12} =$	4 ¹ 8 ¹ 1 ¹ 1 5 ¹ 7 ¹ 1 ¹ 0 6 ¹ 9 ² 0 ¹ 3
$F_{14} = F_{12} + 11F_{13} =$	3 1 5 5 ₁ 3 ₁ 0 ₁ 6 3 ₁ 5 ₁ 3 ₁ 3 ₁ 4 ₁ 3 ₁
$3F_{14} =$	9 3 ₁ 5 ₁ 6 0 1 8 0 6 0 ₁ 0 ₁ 3 0 1
$S_{64} = F_{13} + 3F_{14} =$	3 2 7 7 5 8 9 0 2 0 1 6 0 1
Ответ: $S_{64} =$	1 0 6 1 0 2 0 9 8 5 7 7 2 3

Таблица 8. Вычисление S_{64} по способу б).

$S_1 =$	1
$S_2 =$	1
$S_3 = S_1 + S_2 =$	2
$S_4 = S_2 + S_3 =$	3
$S_5 = S_3 + S_4 =$	5
$S_6 = S_4 + S_5 =$	8
$S_7 = S_5 + S_6 =$	1 3
$S_8 = S_6 + S_7 =$	2 1
$S_9 = S_7 + S_8 =$	3 4
$S_{10} = S_8 + S_9 =$	5 5
$S_{11} = S_9 + S_{10} =$	8 ₁ 9
$S_{12} = S_{10} + S_{11} =$	1 ₁ 4 ₁ 4
$S_{13} = S_{11} + S_{12} =$	2 3 3
$S_{14} = S_{12} + S_{13} =$	3 ₁ 7 ₁ 7
$S_{15} = S_{13} + S_{14} =$	6 1 0
$S_{16} = S_{14} + S_{15} =$	9 8 7
$S_{17} = S_{15} + S_{16} =$	1 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 7
$S_{18} = S_{16} + S_{17} =$	2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 4
$S_{19} = S_{17} + S_{18} =$	4 1 ₁ 8 1
$S_{20} = S_{18} + S_{19} =$	6 7 ₁ 6 5
$S_{21} = S_{19} + S_{20} =$	1 0 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 6
$S_{22} = S_{20} + S_{21} =$	1 7 ₁ 7 1 1
$S_{23} = S_{21} + S_{22} =$	2 ₁ 8 ₁ 6 5 7

Продолжение таб. 8 на следующей странице

$S_{24} = S_{22} + S_{23} =$	4 ₁ 6 ₁ 3 ₁ 6 ₁ 8
$S_{25} = S_{23} + S_{24} =$	7 ₁ 5 0 2 ₁ 5
$S_{26} = S_{24} + S_{25} =$	1 2 1 3 ₁ 9 3
$S_{27} = S_{25} + S_{26} =$	1 ₁ 9 6 4 ₁ 1 ₁ 8
$S_{28} = S_{26} + S_{27} =$	3 ₁ 1 ₁ 7 ₁ 8 1 1
$S_{29} = S_{27} + S_{28} =$	5 1 ₁ 4 ₁ 2 2 ₁ 9
$S_{30} = S_{28} + S_{29} =$	8 3 2 0 4 0
$S_{31} = S_{29} + S_{30} =$	1 ₁ 3 4 6 2 ₁ 6 9
$S_{32} = S_{30} + S_{31} =$	2 1 ₁ 7 ₁ 8 3 0 ₁ 9
$S_{33} = S_{31} + S_{32} =$	3 5 ₁ 2 ₁ 4 5 7 ₁ 8
$S_{34} = S_{32} + S_{33} =$	5 ₁ 7 0 2 ₁ 8 ₁ 8 ₁ 7
$S_{35} = S_{33} + S_{34} =$	9 2 2 ₁ 7 ₁ 4 ₁ 6 ₁ 5
$S_{36} = S_{34} + S_{35} =$	1 ₁ 4 ₁ 9 3 0 3 ₁ 5 2
$S_{37} = S_{35} + S_{36} =$	2 4 ₁ 1 5 7 ₁ 8 1 7
$S_{38} = S_{36} + S_{37} =$	3 ₁ 9 0 ₁ 8 ₁ 8 1 6 ₁ 9
$S_{39} = S_{37} + S_{38} =$	6 ₁ 3 2 ₁ 4 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 6
$S_{40} = S_{38} + S_{39} =$	1 0 2 3 3 ₁ 4 ₁ 1 ₁ 5 ₁ 5
$S_{41} = S_{39} + S_{40} =$	1 6 5 5 ₁ 8 0 1 4 1
$S_{42} = S_{40} + S_{41} =$	2 ₁ 6 ₁ 7 ₁ 9 1 4 2 ₁ 9 6
$S_{43} = S_{41} + S_{42} =$	4 ₁ 3 ₁ 3 ₁ 4 ₁ 9 4 4 ₁ 3 ₁ 7
$S_{44} = S_{42} + S_{43} =$	7 0 1 4 ₁ 0 ₁ 8 ₁ 7 3 ₁ 3
$S_{45} = S_{43} + S_{44} =$	1 1 3 4 ₁ 9 0 ₁ 3 1 ₁ 7 0
$S_{46} = S_{44} + S_{45} =$	1 8 3 ₁ 6 ₁ 3 1 1 ₁ 9 0 3
$S_{47} = S_{45} + S_{46} =$	2 ₁ 9 ₁ 7 1 2 1 5 0 7 3
$S_{48} = S_{46} + S_{47} =$	4 ₁ 8 0 7 5 2 ₁ 6 ₁ 9 ₁ 7 6
$S_{49} = S_{47} + S_{48} =$	7 ₁ 7 7 ₁ 8 ₁ 7 4 2 ₁ 0 ₁ 4 ₁ 9
$S_{50} = S_{48} + S_{49} =$	1 ₁ 2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 6 ₁ 2 ₁ 6 ₁ 9 0 2 ₁ 5
$S_{51} = S_{49} + S_{50} =$	2 0 3 ₁ 6 ₁ 5 0 1 ₁ 1 0 7 4
$S_{52} = S_{50} + S_{51} =$	3 2 ₁ 9 ₁ 5 1 2 8 0 0 ₁ 9 ₁ 9
$S_{53} = S_{51} + S_{52} =$	5 3 ₁ 3 1 6 2 ₁ 9 1 1 ₁ 7 ₁ 3
$S_{54} = S_{52} + S_{53} =$	8 6 2 6 ₁ 7 5 ₁ 7 1 2 ₁ 7 2
$S_{55} = S_{53} + S_{54} =$	1 ₁ 3 ₁ 9 5 ₁ 8 ₁ 3 ₁ 8 ₁ 6 2 4 ₁ 4 5
$S_{56} = S_{54} + S_{55} =$	2 2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 5 1 ₁ 4 3 3 ₁ 7 1 ₁ 7
$S_{57} = S_{55} + S_{56} =$	3 6 ₁ 5 ₁ 4 3 5 2 ₁ 9 6 1 6 2
$S_{58} = S_{56} + S_{57} =$	5 ₁ 9 1 2 ₁ 8 ₁ 6 ₁ 7 ₁ 2 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 7 ₁ 9
$S_{59} = S_{57} + S_{58} =$	9 ₁ 5 6 ₁ 7 ₁ 2 2 0 2 ₁ 6 0 ₁ 4 ₁ 1
$S_{60} = S_{58} + S_{59} =$	1 ₁ 5 ₁ 4 ₁ 8 0 0 ₁ 8 7 5 ₁ 5 9 2 0
$S_{61} = S_{59} + S_{60} =$	2 ₁ 5 0 ₁ 4 7 3 0 ₁ 7 ₁ 8 1 ₁ 9 6 1
$S_{62} = S_{60} + S_{61} =$	4 0 5 2 ₁ 7 3 ₁ 9 ₁ 5 ₁ 3 7 ₁ 8 ₁ 8 1
$S_{63} = S_{61} + S_{62} =$	6 5 ₁ 5 ₁ 7 ₁ 4 ₁ 7 0 3 1 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 4 2
Ответ: $S_{64} = S_{62} + S_{63} =$	1 0 6 1 0 2 0 9 8 5 7 7 2 3

Таблица 9. Вычисление S_{86} по способу а).

$F_1 =$	0
$F_2 =$	1
$F_3 = F_1 + 11F_2 =$	1 1
$F_4 = F_2 + 11F_3 =$	2 2 1
$F_5 = F_3 + 11F_4 =$	3 5 ¹ 3 ¹ 1
$F_6 = F_4 + 11F_5 =$	5 0 ¹ 0 5 1
$F_7 = F_5 + 11F_6 =$	8 ¹ 0 4 6 ¹ 6 ¹ 1
$F_8 = F_6 + 11F_7 =$	3 ¹ 9 ¹ 4 ¹ 5 ¹ 4 ¹ 8 ¹ 1 ¹
$F_9 = F_7 + 11F_8 =$	1 3 ¹ 8 ¹ 6 ² 6 ¹ 4 ¹ 0 2
$F_{10} = F_8 + 11F_9 =$	4 3 ¹ 6 ¹ 0 ¹ 8 ¹ 9 ² 6 ¹ 2 ¹ 2
$F_{11} = F_9 + 11F_{10} =$	5 0 8 ¹ 3 ¹ 5 ¹ 2 ¹ 7 ¹ 1 ¹ 5 2
$F_{12} = F_{10} + 11F_{11} =$	9 ¹ 8 ¹ 4 ¹ 2 ¹ 7 ¹ 7 ¹ 6 ¹ 1 ¹ 9 ¹ 7 ¹ 2 ¹
$F_{13} = F_{11} + 11F_{12} =$	4 ¹ 8 ¹ 1 ¹ 1 5 ¹ 7 ¹ 1 ¹ 0 6 ¹ 9 ² 0 ¹ 3
$F_{14} = F_{12} + 11F_{13} =$	3 1 ¹ 5 5 ¹ 3 ¹ 0 ¹ 6 3 5 ¹ 3 ¹ 3 4 ¹ 3
$F_{15} = F_{13} + 11F_{14} =$	7 ¹ 2 ¹ 8 ¹ 1 ¹ 4 1 8 ¹ 9 ² 4 ² 8 ¹ 7 ¹ 0 ¹ 8 ¹ 3 ¹
$F_{16} = F_{14} + 11F_{15} =$	0 1 6 ¹ 5 ¹ 9 ¹ 5 ¹ 5 ¹ 1 ¹ 0 7 ¹ 9 ² 2 ¹ 2 ¹ 2 4
$F_{17} = F_{15} + 11F_{16} =$	7 3 ¹ 5 ¹ 3 ¹ 9 ² 6 ² 9 ² 6 ¹ 6 ¹ 5 ¹ 4 ¹ 3 ¹ 3 8 ¹ 6 ¹ 4 ¹
$F_{18} = F_{16} + 11F_{17} =$	7 1 ₅ 5 ₁ 4 ₄ 2 ₃ 2 ₁ 2 ₁ 8 ₁ 3 ₆ 9 ₃ 9 ₇ 0 ₇ 9 3 ₇ 9 ₃ 1 ₇ 5 ₁
$8F_{18} =$	6 3 ₁ 1 6 9 7 ₁ 7 ₁ 5 ₁ 0 ₁ 5 9 ₁ 7 ₁ 2 ₁ 1 5 5 ₁ 1 ₁ 4
$S_{86} = F_{17} + 8F_{18} =$	3 7 6 9 8 4 7 2 7 0 4 1 6 9 1 0 2 4
Ответ: $S_{86} =$	4 2 0 1 9 6 1 4 0 7 2 7 4 8 9 6 7 3

Таблица 10. Вычисление S_{86} по способу б).

$S_1 =$	1
$S_2 =$	1
$S_3 = S_1 + S_2 =$	2
$S_4 = S_2 + S_3 =$	3
$S_5 = S_3 + S_4 =$	5
$S_6 = S_4 + S_5 =$	8
$S_7 = S_5 + S_6 =$	1 3
$S_8 = S_6 + S_7 =$	2 1
$S_9 = S_7 + S_8 =$	3 4
$S_{10} = S_8 + S_9 =$	5 5
$S_{11} = S_9 + S_{10} =$	8 ₁ 9
$S_{12} = S_{10} + S_{11} =$	1 ₁ 4 ₁ 4
$S_{13} = S_{11} + S_{12} =$	2 3 3
$S_{14} = S_{12} + S_{13} =$	3 ₁ 7 ₁ 7
$S_{15} = S_{13} + S_{14} =$	6 1 0
$S_{16} = S_{14} + S_{15} =$	9 8 7
$S_{17} = S_{15} + S_{16} =$	1 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 7
$S_{18} = S_{16} + S_{17} =$	2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 4
$S_{19} = S_{17} + S_{18} =$	4 1 ₁ 8 1

Продолжение таб. 10 на следующей странице

$S_{20} = S_{18} + S_{19} =$	6 7 ₁ 6 5
$S_{21} = S_{19} + S_{20} =$	1 0 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 6
$S_{22} = S_{20} + S_{21} =$	1 7 ₁ 7 1 1
$S_{23} = S_{21} + S_{22} =$	2 ₁ 8 ₁ 6 5 7
$S_{24} = S_{22} + S_{23} =$	4 ₁ 6 ₁ 3 ₁ 6 ₁ 8
$S_{25} = S_{23} + S_{24} =$	7 ₁ 5 0 2 ₁ 5
$S_{26} = S_{24} + S_{25} =$	1 2 1 3 ₁ 9 3
$S_{27} = S_{25} + S_{26} =$	1 ₁ 9 6 4 ₁ 1 ₁ 8
$S_{28} = S_{26} + S_{27} =$	3 ₁ 1 ₁ 7 ₁ 8 1 1
$S_{29} = S_{27} + S_{28} =$	5 1 ₁ 4 ₁ 2 2 ₁ 9
$S_{30} = S_{28} + S_{29} =$	8 3 2 0 4 0
$S_{31} = S_{29} + S_{30} =$	1 ₁ 3 4 6 2 ₁ 6 9
$S_{32} = S_{30} + S_{31} =$	2 1 ₁ 7 ₁ 8 3 0 ₁ 9
$S_{33} = S_{31} + S_{32} =$	3 5 ₁ 2 ₁ 4 5 7 ₁ 8
$S_{34} = S_{32} + S_{33} =$	5 ₁ 7 0 2 ₁ 8 ₁ 8 ₁ 7
$S_{35} = S_{33} + S_{34} =$	9 2 2 ₁ 7 ₁ 4 ₁ 6 ₁ 5
$S_{36} = S_{34} + S_{35} =$	1 ₁ 4 ₁ 9 3 0 3 ₁ 5 2
$S_{37} = S_{35} + S_{36} =$	2 4 ₁ 1 5 7 ₁ 8 1 7
$S_{38} = S_{36} + S_{37} =$	3 ₁ 9 0 ₁ 8 ₁ 8 1 6 ₁ 9
$S_{39} = S_{37} + S_{38} =$	6 ₁ 3 2 ₁ 4 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 6
$S_{40} = S_{38} + S_{39} =$	1 0 2 3 3 ₁ 4 ₁ 1 ₁ 5 ₁ 5
$S_{41} = S_{39} + S_{40} =$	1 6 5 5 ₁ 8 0 1 4 1
$S_{42} = S_{40} + S_{41} =$	2 ₁ 6 ₁ 7 ₁ 9 1 4 2 ₁ 9 6
$S_{43} = S_{41} + S_{42} =$	4 ₁ 3 ₁ 3 ₁ 4 ₁ 9 4 4 ₁ 3 ₁ 7
$S_{44} = S_{42} + S_{43} =$	7 0 1 4 ₁ 0 ₁ 8 ₁ 7 3 ₁ 3
$S_{45} = S_{43} + S_{44} =$	1 1 3 4 ₁ 9 0 ₁ 3 1 ₁ 7 0
$S_{46} = S_{44} + S_{45} =$	1 8 3 ₁ 6 ₁ 3 1 1 ₁ 9 0 3
$S_{47} = S_{45} + S_{46} =$	2 ₁ 9 ₁ 7 1 2 1 5 0 7 3
$S_{48} = S_{46} + S_{47} =$	4 ₁ 8 0 7 5 2 ₁ 6 ₁ 9 ₁ 7 6
$S_{49} = S_{47} + S_{48} =$	7 ₁ 7 7 ₁ 8 ₁ 7 4 2 ₁ 0 ₁ 4 ₁ 9
$S_{50} = S_{48} + S_{49} =$	1 ₁ 2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 6 ₁ 2 ₁ 6 ₁ 9 0 2 ₁ 5
$S_{51} = S_{49} + S_{50} =$	2 0 3 ₁ 6 ₁ 5 0 1 ₁ 1 0 7 4
$S_{52} = S_{50} + S_{51} =$	3 2 ₁ 9 ₁ 5 1 2 8 0 0 ₁ 9 ₁ 9
$S_{53} = S_{51} + S_{52} =$	5 3 ₁ 3 1 6 2 ₁ 9 1 1 ₁ 7 ₁ 3
$S_{54} = S_{52} + S_{53} =$	8 6 2 6 ₁ 7 5 ₁ 7 1 2 ₁ 7 2
$S_{55} = S_{53} + S_{54} =$	1 ₁ 3 ₁ 9 5 ₁ 8 ₁ 3 ₁ 8 ₁ 6 2 4 ₁ 4 5
$S_{56} = S_{54} + S_{55} =$	2 2 ₁ 5 ₁ 8 ₁ 5 1 ₁ 4 3 3 ₁ 7 1 ₁ 7
$S_{57} = S_{55} + S_{56} =$	3 6 ₁ 5 ₁ 4 3 5 2 ₁ 9 6 1 6 2
$S_{58} = S_{56} + S_{57} =$	5 ₁ 9 1 2 ₁ 8 ₁ 6 ₁ 7 ₁ 2 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 7 ₁ 9
$S_{59} = S_{57} + S_{58} =$	9 ₁ 5 6 ₁ 7 ₁ 2 2 0 2 ₁ 6 0 ₁ 4 ₁ 1
$S_{60} = S_{58} + S_{59} =$	1 ₁ 5 ₁ 4 ₁ 8 0 0 ₁ 8 7 5 ₁ 5 9 2 0
$S_{61} = S_{59} + S_{60} =$	2 ₁ 5 0 ₁ 4 7 3 0 ₁ 7 ₁ 8 1 ₁ 9 6 1
$S_{62} = S_{60} + S_{61} =$	4 0 5 2 ₁ 7 3 ₁ 9 ₁ 5 ₁ 3 7 ₁ 8 ₁ 8 1
$S_{63} = S_{61} + S_{62} =$	6 5 ₁ 5 ₁ 7 ₁ 4 ₁ 7 0 3 1 ₁ 9 ₁ 8 ₁ 4 2
$S_{64} = S_{62} + S_{63} =$	1 0 ₁ 6 1 0 2 0 ₁ 9 ₁ 8 5 ₁ 7 ₁ 7 2 3

Продолжение таб. 10 на следующей странице

$S_{65} = S_{63} + S_{64} =$	1 7 1 6 7 6 8 ₁ 0 ₁ 1 ₁ 7 ₁ 7 ₁ 5 6 5
$S_{66} = S_{64} + S_{65} =$	2 ₁ 7 7 ₁ 7 ₁ 7 ₁ 8 ₁ 9 0 0 ₁ 3 ₁ 5 2 ₁ 8 ₁ 8
$S_{67} = S_{65} + S_{66} =$	4 ₁ 4 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 5 ₁ 5 ₁ 7 0 2 1 2 ₁ 8 ₁ 5 ₁ 3
$S_{68} = S_{66} + S_{67} =$	7 2 ₁ 7 2 3 ₁ 4 ₁ 6 0 2 4 ₁ 8 1 4 1
$S_{69} = S_{67} + S_{68} =$	1 1 ₁ 7 ₁ 6 6 ₁ 9 0 3 0 4 ₁ 6 0 ₁ 9 ₁ 9 4
$S_{70} = S_{68} + S_{69} =$	1 ₁ 9 0 ₁ 3 ₁ 9 ₁ 2 4 ₁ 9 0 ₁ 7 0 ₁ 9 ₁ 1 ₁ 3 5
$S_{71} = S_{69} + S_{70} =$	3 0 8 0 ₁ 6 1 ₁ 5 ₁ 2 1 1 7 0 1 2 ₁ 9
$S_{72} = S_{70} + S_{71} =$	4 ₁ 9 ₁ 8 4 ₁ 5 4 0 1 1 ₁ 8 ₁ 7 9 2 6 ₁ 4
$S_{73} = S_{71} + S_{72} =$	8 ₁ 0 ₁ 6 5 1 5 5 3 3 0 ₁ 4 ₁ 9 3 ₁ 9 3
$S_{74} = S_{72} + S_{73} =$	1 ₁ 3 0 ₁ 4 ₁ 9 6 ₁ 9 ₁ 5 4 4 9 2 ₁ 8 ₁ 6 ₁ 5 ₁ 7
$S_{75} = S_{73} + S_{74} =$	2 1 1 1 ₁ 4 ₁ 8 ₁ 5 0 ₁ 7 ₁ 7 ₁ 9 ₁ 7 ₁ 8 0 ₁ 5 0
$S_{76} = S_{74} + S_{75} =$	3 4 1 6 4 ₁ 5 4 6 ₁ 2 ₁ 2 ₁ 9 0 ₁ 6 7 0 7
$S_{77} = S_{75} + S_{76} =$	5 5 2 ₁ 7 ₁ 9 3 ₁ 9 ₁ 7 0 0 ₁ 8 8 ₁ 4 ₁ 7 5 ₁ 7
$S_{78} = S_{76} + S_{77} =$	8 ₁ 9 4 ₁ 4 ₁ 3 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 3 2 3 ₁ 7 ₁ 9 1 ₁ 4 ₁ 6 ₁ 4
$S_{79} = S_{77} + S_{78} =$	1 ₁ 4 ₁ 4 ₁ 7 2 3 ₁ 3 4 0 2 4 ₁ 6 ₁ 7 6 2 2 1
$S_{80} = S_{78} + S_{79} =$	2 3 4 1 6 ₁ 7 2 ₁ 8 3 4 ₁ 8 ₁ 4 ₁ 6 ₁ 7 6 ₁ 8 5
$S_{81} = S_{79} + S_{80} =$	3 ₁ 7 ₁ 8 ₁ 8 ₁ 9 0 6 ₁ 2 3 ₁ 7 ₁ 3 1 ₁ 4 ₁ 3 ₁ 9 0 ₁ 6
$S_{82} = S_{80} + S_{81} =$	6 1 ₁ 3 0 ₁ 5 7 ₁ 9 ₁ 0 ₁ 7 2 1 6 1 1 ₁ 5 9 1
$S_{83} = S_{81} + S_{82} =$	9 ₁ 9 1 ₁ 9 ₁ 4 ₁ 8 ₁ 5 3 0 ₁ 9 4 ₁ 7 5 ₁ 5 ₁ 4 ₁ 9 7
$S_{84} = S_{82} + S_{83} =$	1 ₁ 6 0 5 0 0 ₁ 6 4 3 8 ₁ 1 ₁ 6 ₁ 3 ₁ 6 ₁ 7 0 ₁ 8 ₁ 8
$S_{85} = S_{83} + S_{84} =$	2 ₁ 5 ₁ 9 ₁ 6 9 5 ₁ 4 ₁ 9 ₁ 6 ₁ 9 1 1 1 2 2 5 ₁ 8 ₁ 5
Ответ: $S_{86} = S_{84} + S_{85} =$	4 2 0 1 9 6 1 4 0 7 2 7 4 8 9 6 7 3

Вычисления чисел Фибоначчи двумя способами завершены. Остается лишь сравнить показания по каждому из способов (отчасти, не столько те арифметические операции, что формально определены, а все те, которые фактически исполнены) и сделать основной вывод.

Итак, непосредственно при вычислении S_{27} было:

- 1) потрачено
 - 1 мин. 45 сек. на новый способ а) и
 - 3 мин. 35 сек. на способ б);
- 2) выполнено операций над многозн. числами (заполнено строк)
 - 10 при новом способе а) и
 - 27 при способе б);
- 3) выполнено поразрядных операций (заполнено клеточек)
 - 39 при новом способе а) и
 - 79 при способе б).

Непосредственно при вычислении S_{40} было:

- 1) потрачено
 - 2 мин. 20 сек. на новый способ а) и
 - 7 мин. 00 сек. на способ б);
- 2) выполнено операций над многозн. числами (заполнено строк)
 - 11 при новом способе а) и
 - 40 при способе б);

- 3) выполнено поразрядных операций (заполнено клеточек)
55 при новом способе а) и
173 при способе б).

Непосредственно при вычислении S_{48} было:

- 1) потрачено
4 мин. 20 сек. на новый способ а) и
9 мин. 30 сек. на способ б);
- 2) выполнено операций над многозн. числами (заполнено строк)
13 при новом способе а) и
48 при способе б);
- 3) выполнено поразрядных операций (заполнено клеточек)
86 при новом способе а) и
249 при способе б).

Непосредственно при вычислении S_{64} было:

- 1) потрачено
6 мин. 00 сек. на новый способ а) и
16 мин. 10 сек. на способ б);
- 2) выполнено операций над многозн. числами (заполнено строк)
17 при новом способе а) и
64 при способе б);
- 3) выполнено поразрядных операций (заполнено клеточек)
134 при новом способе а) и
440 при способе б).

Непосредственно при вычислении S_{86} было:

- 1) потрачено
14 мин. 40 сек. на новый способ а) и
28 мин. 10 сек. на способ б);
- 2) выполнено операций над многозн. числами (заполнено строк)
21 при новом способе а) и
86 при способе б);
- 3) выполнено поразрядных операций (заполнено клеточек)
208 при новом способе а) и
790 при способе б).

Сравнение показателей склоняет в пользу нового способа, а потому напрашивается такой основной вывод:

В данной статье описан самый экономичный на этот день способ вычисления членов ряда Фибоначчи S_n , начиная с S_6 , с помощью бумаги и ручки.

Скажу честно, что пользуюсь этим способом уже 20 лет, но только месяц назад сообразил как набрать таблицы в \LaTeX 2 ϵ и затем обнародовать.

г. Харьков, 19 декабря 2008 г.

А. Г. Егоров.

Статья на сайте с 19 декабря 2008 года.