Эммануилу Ароновичу Майданику
п о с в я щ а е т с я.

О двух интересных вопросах комбинаторики.

(имеющиеся ответы на них могут стать весьма полезными для игроков
в числовые спортивные лотереи по всему миру.)

Введем обозначения:

Через $\{b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k\}_n$ обозначим комбинацию из k ($n \geqslant k \geqslant 1$) строго упорядоченных по возрастанию чисел $b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k$, что тем или иным способом выбраны из n первых чисел натурального ряда.

Каждой комбинации $\{b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k\}_n$ можно в соответствие сопоставить целое число (некий **н**омер **к**омбинации), которое совпадает с номером занимаемой этой комбинацией строки в упорядоченном по возрастанию C_n^k- строчном списке вариантов и обозначается оно так: $N_{\{b_1,\,\ldots,\,b_{k-1},\,b_k\}_n}$. Ясно, что в первой строке списка увидим комбинацию $\{1,\ 2,\ldots,\ k-1,\ k\}_n$, во второй $-$ $\{1,\ 2,\ldots,\ k-1,\ k+1\}_n$, в предпоследней $-$ комбинацию $\{n-k,\ n+2-k,\ n+3-k,\ \ldots,\ n-1,\ n\}_n$, а замыкает список комбинация $\{n+1-k,\ n+2-k,\ \ldots,\ n-1,\ n\}_n$.

Пусть не сразу, но все же возникают такие интересные вопросы:

Как, не прибегая к C_n^k- строчному выписыванию вариантов, для заданной комбинации $\{b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k\}_n$ определить её $N_{\{b_1,\,\ldots,\,b_{k-1},\,b_k\}_n}$?

Как, не имея под рукой C_n^k- строчного списка вариантов, по заданному наперед номеру некоей комбинации $N_{\{b_1,\,\ldots,\,b_{k-1},\,b_k\}_n}$ безошибочно определить эту комбинацию $\{b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k\}_n$?

Исчерпывающий ответ (но не единственный) на первый вопрос лёгок, не требует пояснений и много места не занимает, а потому, не мешкая, приводим его. Итак, номер заданной комбинации $\{b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k\}_n$ вычисляется по формуле:

$$N_{\{b_1,\,\ldots,\,b_{k-1},\,b_k\}_n} = C_n^k - n + b_k +$$
$$+\underbrace{C^1_{n-b_{k-1}} - C^{1+1}_{n+1-b_{k-1}} + C^2_{n-b_{k-2}} - C^{2+1}_{n+1-b_{k-2}} + \ldots + C^{k-1}_{n-b_1} - C^{(k-1)+1}_{n+1-b_1}}_{\text{всего } 2(k-1) \text{ членов}}.$$

П р и м е р 1: Дана комбинация $\{4,\ 5,\ 9\}_{12}$. Требуется найти $N_{\{4,\,5,\,9\}_{12}}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$N_{\{4,\,5,\,9\}_{12}} = C^3_{12} - 12 + 9 + C^1_{12-5} - C^2_{13-5} + C^2_{12-4} - C^3_{13-4} =$$
$$= 220 - 12 + 9 + 7 - 28 + 28 - 84 = 140.$$

Ответ: $N_{\{4,\,5,\,9\}_{12}} = 140$.

П р и м е р 2: Дана комбинация $\{5,\ 19,\ 23,\ 30,\ 33,\ 41\}_{49}$. Требуется найти $N_{\{5,\,19,\,23,\,30,\,33,\,41\}_{49}}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$N_{\{5,\,19,\,23,\,30,\,33,\,41\}_{49}} = C^6_{49} - 49 + 41 + C^1_{49-33} - C^2_{50-33} + C^2_{49-30} - C^3_{50-30} +$$
$$+ C^3_{49-23} - C^4_{50-23} + C^4_{49-19} - C^5_{50-19} + C^5_{49-5} - C^6_{50-5} =$$
$$= 13983816 - 49 + 41 + 16 - 136 + 171 - 1140 + 2600 - 17550 + 27405 - 169911 +$$
$$+ 1086008 - 8145060 = 6766211.$$

Ответ: $N_{\{5,\,19,\,23,\,30,\,33,\,41\}_{49}} = 6766211$.

Другими словами, числовую комбинацию $\{4,\ 5,\ 9\}_{12}$ мы обязательно обнаружили бы в 140-ой строке из 220 ($= C_{12}^3$) возможных для этого случая строк, если бы такой список составили. Так само, числовую комбинацию $\{5,\ 19,\ 23,\ 30,\ 33,\ 41\}_{49}$ мы обязательно обнаружили бы в 6766211-ой строке из 13983816 ($= C_{49}^6$) возможных для этого случая строк, если бы и такой список составили.

Исчерпывающий ответ на второй вопрос и второй вариант ответа на первый вопрос заключены в заранее составляемой числовой таблице, состоящей из $2k$ колонок (заметим, что составление требуемой таблицы займет какое-то время, но этот временной отрезок будет намного меньшим того, что требовалось бы для C_n^k–строчного выписывания вариантов). На примере составленной таблицы покажем, каким образом отыскивается конкретная комбинации $\{b_1,\ b_2,\ b_3\}_{12}$, зная лишь, что $N_{\{b_1,\, b_2,\, b_3\}_{12}} = 140$. В нашем случае должна получиться комбинация $\{4,\ 5,\ 9\}_{12}$.

а	б	в	г	д	е
1	0	0			
2	45	55	0	0	
3	81	100	9	10	1
4	109	136	17	19	2
5	130	164	24	27	3
6	145	185	30	34	4
7	155	200	35	40	5
8	161	210	39	45	6
9	164	216	42	49	7
10	165	219	44	52	8
11			45	54	9
12					10

Приступим:
шаг 1. По столбику 'в' (на шаге 1 всегда третий столбик от левого края) определили, что $136 < 140 \leqslant 164$ (форма $a \leqslant N < t$ всегда игнорируется). На заметке меньшее (всегда меньшее) 136. Оно в строке 4 (см. столбик 'а'). Итак, найдено: $\{4,\ b_2,\ b_3\}_{12}$, а заодно, с учетом столбика 'б' вычислено: $31 = 140 - 109$. Для второго шага нужным есть 31.

шаг 2. В столбике 'д' видим, что $27 < 31 \leqslant 34$ (форма $a \leqslant b_i < t$ всегда игнорируется). На заметке меньшее (всегда меньшее) 27. Оно в строке 5 (см. столбик 'а').
Итак, найдено: $\{4,\ 5,\ b_3\}_{12}$, а заодно, с учетом столбика 'г' вычислено: $7 = 31 - 24$. Для третьего шага нужным есть 7.

шаг 3. По столбику 'е' определили, что 7 в строке 9 (см. столбик 'а').
Итак, найдено: $\{4,\ 5,\ 9\}_{12}$. Задание выполнено!

При других примерах рано или поздно на каких-то не последних шагах, да хоть бы и на первом, может возникнуть ситуация, что в правой части двойного неравенства будет выполнено условие: =. Ваши действия теперь: завершите этот шаг так, как описано выше, т. е. для начатого шага вы

находите числовую замену данному b_k. Затем, игнорируя все следующие шаги, записывайте мгновенный ответ по правилу:
все недостающие номера комбинации являются последними, наибольшими последовательными числами, что имеет набор n.

Всегда помните! Заданный N искомой комбинации $\{b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k\}_n$ должен удовлетворять $1 \leqslant N \leqslant C_n^k$, в противном случае, задача нерешаема.

Вот способ получения ответа на первый вопрос по составленной таблице. Итак, унас есть $\{4, 5, 9\}_{12}$. Требуется табличным способом определить, что номер этой конкретной комбинации равен 140. В получении ответа используются *только* столбики 'а', 'б', 'г', 'е'. Главное выделено *курсивом.* Вернитесь к разбору предыдущей задачи и попытайтесь самостоятельно найти правильный ответ: $N_{\{4,\ 5,\ 9\}_{12}} = 140$.

Метод подходит даже к таким упорядоченным без повторов комбинациям, в которых целые (не целые) числа выбраны из набора n, где *собственно сам набор* не подчиняется основному требованию: быть первыми n числами натурального ряда. И чтобы воспользоваться им, надо отдельным списком ввести переобозначение в предложенном наборе целых (не целых) чисел, т. е., значение '1' присвоить минимальному целому (не целому) в наборе, значение '2' – минимальному из оставшихся целых (не целых) и т. д.

Для читателя безответным остался ещё вопрос: А как же составляются таблицы для конкретных n и k? Отвечаем: формирование одинарных (без пары) столбиков 'а' и 'е' не требует пояснений. Подсказка для формирования парных столбиков 'б' и 'в'; 'г' и 'д':
45 – это C_{10}^2,
81 – это $C_9^2 + C_{10}^2$,
109 – это $C_8^2 + C_9^2 + C_{10}^2$ и т. д., и т. п.
55 – это C_{11}^2,
100 – это $C_{10}^2 + C_{11}^2$,
136 – это $C_9^2 + C_{10}^2 + C_{11}^2$ и т. д., и т. п.
9 – это C_9^1,
17 – это $C_8^1 + C_9^1$,
24 – это $C_7^1 + C_8^1 + C_9^1$ и т. д., и т. п.
10 – это C_{10}^1,
19 – это $C_9^1 + C_{10}^1$,
27 – это $C_8^1 + C_9^1 + C_{10}^1$ и т. д., и т. п.

Любители игр в числовые лотореи, кои упомянуты в тексте подзаголовка, могут воспользоваться предложенным методом, в надежде сорвать тот или иной Джэкпот. Попробуйте! Перед покупкой билета преобразуйте номер купюры в конкретную комбинацию, заполните бланк этой комбинацией, а купюрой расчитайтесь с кассиром. Удачи Вам!
Вышеизложенное выстроено на изысканиях далекого 1975 года.

г. Харьков, А. Г. Егоров.
Написано 26 декабря 2012 года.