УДК 511.13

Светлой памяти
Галины Григорьевны Цибулько (Криворучко по мужу),
учителю математики Змиевской средней школы-интерната.

В нескольких шагах от полного решения ВТФ элементарными средствами

А. Г. Егоров, любитель математики, г. Харьков.

Элементарными средствами предметно (по Петрову) доказывается одна и приводится гипотетическое решение другой из двух частей ВТФ. Историков математики, возможно, заинтересует тот легко подтверждаемый факт, что к нахождению такого решения очень близок был Н. Х. Абель.

Close to full solution to FLT by elementary means

A. G. Yegorov, amateur mathematician, Kharkov s.

Summary. The paper objectively (according to Petrov) proves by elementary means one and gives hypothetical solution of the second of two parts of FLT. Historians of mathematics might be interested by the easily proven fact that N. H. Abel was very close to finding such solution.

От того, что мы знаем, что некоторое число иррациональное, нет никакой практической пользы, но если мы можем знать нечто, то не знать этого становится невыносимо.
Э. Ч. Титчмарш.

I. Основное утверждение и средства к доказательству двух его частей.

„При любых попытках доказать Последнюю теорему Ферма элементарными средствами — скажем, не прибегая к методам куммеровой теории идеальных простых делителей, — нужно принимать во внимание тот факт, что даже один только частный случай $n = 7$ в течение многих лет не поддавался усилиям лучших европейских математиков. Конечно, вполне возможно, что они подходили к проблеме ложными путями и что существует какая-то простая идея — возможно, открытая Ферма, — применимая ко всем случаям; однако, с другой стороны, более вероятно, что идея, пригодная для *любых* n, была бы найдена, хотя бы в неуклюжей форме, при интенсивном поиске для *одного* n“ — мы привели абзац из монографии Г. Эдвардса (см. с. 94 в [1]). Соображения во втором предложении цитаты многого стоят, а верная им цена сложится у читателя, когда осилит статью до конца.

Как бы то ни было, но идея, пригодная для *любых нечетных простых* n, всё же нащупана. Дальнейшее её развитие привело (1989) к доказательству одной части, а в 2010 году и к гипотетическому решению другой из двух частей Великой теоремы. Последовательное детальное изложение озвученного результата и есть содержание данной статьи. Ещё укажем, что по соображениям удобства в подаче результатов исследования далее о предмете рассмотрения говорится как о недоказанном увиерждении.

I.1. Основное утверждение.

Великая теорема Ферма (ВТ) формулируется так:

Утверждение 1. *Не существует натуральных чисел a, b и c, для которых*

$$c^n = b^n + a^n, \tag{1}$$

где n — целое, большее 2

(см. Замечание II к задаче 8 книги II в [2]). Сложнейшими методами XX века в 1995 году эту теорему доказал Эндрю Уайлс (Andrew Wiles).

В 45-ом из 48 „Замечаний“к „Арифметике“ Диофанта Ферма дал косвенное доказательство утверждения 1 для всех n, кратных 4 ([2]; тж. см. с. 24 в[1]). Поскольку всякое целое n, не делящееся на 4 и больше 2, делится, по меньшей мере, на одно нечетное простое число, скажем на p, то уравнение (1) (в допущении, что решение (a, b, c) в натуральных числах существует) можно переписать так: $\left(c^{\frac{n}{p}}\right)^p = \left(a^{\frac{n}{p}}\right)^p + \left(b^{\frac{n}{p}}\right)^p$, где степени $a^{\frac{n}{p}}$, $b^{\frac{n}{p}}$ и $c^{\frac{n}{p}}$ целые числа. Поэтому Великую теорему достаточно доказать лишь для простых нечетных показателей $p \geqslant 3$. Доказано также (Грюнерт, 1856): *если решение (a, b, c) уравнения (1) в натуральных числах существует, то $n < a$, $n < b$, $n < c$* (простое решение см., например, на стр. 13 в [3]).

Далее, так как в (1) числа a, b симметричны и $a \neq b$ (случай $a = b$ исключен из рассмотрения, ибо доказать несостоятельность (1) для него легко, если помнить, что при $n \geqslant 2$ число $\sqrt[n]{2}$ иррациональное и применить определение рационального числа), то одно число, скажем a, всегда можно считать меньше b. Ясно, что НОД d любой пары чисел решения (a, b, c) уравнения (1) непременно найдём в качестве сомножителя и в третьем числе. Поэтому тройка $(a/d,\ b/d,\ c/d)$ также решение (1) и состоит из попарно взаимно простых целых чисел. Более того, ясно, что одно и только одно число в этой тройке четно. Такую тройку назовём *примитивным решением уравнения* (1). В противовес этому определению каждую тройку (x, y, z), что при $a = x$, $b = y$, $c = z$ ещё только претендует на роль примитивного решения (1), назовём *примитивной тройкой (x, y, z) с четным произведением xyz*. Из вышесказанного следует, что для установления верности ВТ достаточно *предметно доказать* (определение; [4]) следующее

Основное утверждение (ОУ). *Не существует примитивной тройки (x, y, z) с четным произведением xyz и $p < x < y < z$, для которой*

$$y^p + x^p = z^p, \tag{2}$$

где p — простое $\geqslant 3$.

I.2. Общее замечание к Великой теореме.

Заметную роль в доказательстве ВТ играет следующее

Предложение А. *Для любых действительных положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих уравнению* $a^n + b^n = c^n$, *где n целое* $\geqslant 2$, *верно, что* $c < a + b$ *и при этом,* $a < c$ *и* $b < c$.

Данное утверждение докажем после доказательства следующего

Вспомогательное предложение 1. *Для любых действительных* $a > 0$, $b > 0$ *и целого* $n \geqslant 2$ *имеет место*

$$(a + b)^n > a^n + b^n.$$

Доказательство: По формуле бинома Ньютона имеем $(a + b)^n = a^n + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ясно, что при целом $n \geqslant 2$ правая часть выписанного равенства содержит более 2 членов, при этом, все члены при $a > 0$ и $b > 0$ положительны. Удалив из него все внутренние члены, получим
$(a + b)^n = a^n + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n > a^n + b^n$, ч. т. д.□

Из Вспомогательного предложения 1 прямо вытекает

Следствие 1. *Для любых действительных* $a > 0$, $b > 0$ *и целого* $n \geqslant 2$ *имеет место*

$$a + b > \sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

Подаем обещанное.

Доказательство предложения А: Пусть действительные $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и натуральное $n \geqslant 2$ таковы, что выполняется

$$b^n + a^n = c^n. \tag{3}$$

Тогда $c = \sqrt[n]{a^n + b^n}$. Учтя следствие 1, имеем $c = \sqrt[n]{a^n + b^n} < a + b$, т. е. имеем первое искомое $c < a+b$. Далее, (3) перепишем так: $a^n - (c^n) = -(b^n)$. Так как $b > 0$, то правая часть отрицательна. Следовательно, отрицательна и левая часть, т. е. $a^n - (c^n) < 0$. А раз есть $a^n > 0$ и $c^n > 0$ (по условию $a > 0$ и $c > 0$), то в силу известной теоремы, так или иначе, есть и это $\sqrt[n]{a^n} < \sqrt[n]{c^n}$, т. е. имеем второе искомое $a < c$. По симметрии также $b < c$.□

I.3. Формулы Абеля для Случая I и Случая II Великой теоремы.

В исследовании уравнения (2) фундаментальную роль играет

Лемма 1. *Пусть a, b, c такие целые положительные числа, что*

1) *имеет место равенство*

$$ab = c^n;$$

2) *числа a и b взаимно просты.*

Тогда существуют такие натуральные числа x и y, что

$$a = x^n, \quad b = y^n.$$

Её доказательства здесь нет (см. с. 22-23 [3]). Указанный источник также сообщает нам примечательный факт: в доказательстве этой леммы важную роль играет *основная теорема арифметики.* С помощью леммы 1 для мыслимых нетривиальных целых решений (2) ещё в XIX веке выведены так называемые формулы Абеля для Случая I и Случая II Великой теоремы. Напомним их отличительный признак:
Случай I *Великой теоремы* — случай, при котором ни одно из чисел x, y и z в уравнении (2) *не делится на* p.
Случай II *Великой теоремы* — случай, при котором только одно из чисел x, y и z в уравнении (2) *делится на* p^t
(здесь и далее t — высший показатель степени, с которым p сомножителем входит в каноническое представление соответствующего числа).

Итак, полагаются доказанными следующие утверждения (см. с. 24 [3]; тж. ср. со с. 183 [5]):

Предложение N. *Для любых попарно взаимно простых различной четности и не делящихся на p чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению* (2), *существуют такие пары целых чисел* $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$ *и* $(u_2,\ v_2)$, *состоящие из взаимно простых не делящихся на p чисел, что*

$$\begin{aligned} y + x = u_0^p, &\quad \frac{y^p + x^p}{y + x} = v_0^p, \quad z = u_0 v_0, \\ z - x = u_1^p, &\quad \frac{z^p - x^p}{z - x} = v_1^p, \quad y = u_1 v_1, \\ z - y = u_2^p, &\quad \frac{z^p - y^p}{z - y} = v_2^p, \quad x = u_2 v_2. \end{aligned}$$

Предложение Z. *Для любых попарно взаимно простых различной четности чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению* (2), *при этом, для p степень p^t является высшей в каноническом представлении z, существуют такие пары целых чисел* $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$ *и* $(u_2,\ v_2)$, *состоящие из взаимно простых не делящихся на p чисел, что*

$$\begin{aligned} y + x = p^{tp-1} u_0^p, &\quad \frac{y^p + x^p}{y + x} = p v_0^p, \quad z = p^t u_0 v_0, \\ z - x = u_1^p, &\quad \frac{z^p - x^p}{z - x} = v_1^p, \quad y = u_1 v_1, \\ z - y = u_2^p, &\quad \frac{z^p - y^p}{z - y} = v_2^p, \quad x = u_2 v_2. \end{aligned}$$

Предложение Y. *Для любых попарно взаимно простых различной четности чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению* (2), *при этом, для p степень p^t является высшей в каноническом представлении y, существуют такие пары целых чисел* $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$ *и* $(u_2,\ v_2)$, *состоящие из взаимно простых не делящихся на p чисел, что*

$$
\begin{aligned}
&y+x=u_0^p, && \frac{y^p+x^p}{y+x}=v_0^p, && z=u_0v_0,\\
&z-x=p^{tp-1}u_1^p, && \frac{z^p-x^p}{z-x}=pv_1^p, && y=p^tu_1v_1,\\
&z-y=u_2^p, && \frac{z^p-y^p}{z-y}=v_2^p, && x=u_2v_2.
\end{aligned}
$$

Предложение X. *Для любых попарно взаимно простых различной четности чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению (2), при этом, для p степень p^t является высшей в каноническом представлении x, существуют такие пары целых чисел (u_0, v_0), (u_1, v_1) и (u_2, v_2), состоящие из взаимно простых не делящихся на p чисел, что*

$$
\begin{aligned}
&y+x=u_0^p, && \frac{y^p+x^p}{y+x}=v_0^p, && z=u_0v_0,\\
&z-x=u_1^p, && \frac{z^p-x^p}{z-x}=v_1^p, && y=u_1v_1,\\
&z-y=p^{tp-1}u_2^p, && \frac{z^p-y^p}{z-y}=pv_2^p, && x=p^tu_2v_2.
\end{aligned}
$$

I.4. Тождества.

Важную роль в доказательстве Великой теоремы играют тождества

$$
\begin{aligned}
\tfrac{C-B+A}{2}-A=\tfrac{C+B-A}{2}-B=C-\tfrac{C+B+A}{2}=\tfrac{C+B-A}{2}+\\
+\tfrac{C-B+A}{2}-\tfrac{C+B+A}{2}=\tfrac{C+B+A}{2}-B-A=C-A-\\
-\tfrac{C+B-A}{2}=C-B-\tfrac{C-B+A}{2}=\tfrac{C-B-A}{2}.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Их верность при любых действительных числах A, B и C устанавливается прямой проверкой равенства между крайней правой и другими по отдельности частями.

I.5. Общий план предметного доказательства Основного утверждения.

План состоит из двух частей. Охарактеризуем первую часть.

— Во избежание просчетов в вопросе соблюдения принципа общности при доказательстве ОУ раздельному рассмотрению подлежат 8 *случаев* для чисел вида $\sqrt[p]{x+y}$ (случаи с цифрой 1 назовём *случаи (условия) подпункта* 1 и кратко будем писать *сл. (усл.) пп.* 1, остальные 7 — в том же духе), а именно:

1 $\quad g=\sqrt[p]{4(p-1)[(z-x)+(z-y)]}\leqslant\sqrt[p]{x+y}=w,$

2 $\quad g>w,$

при этом, $p\nmid xyz$;

3 $\quad g\leqslant w,$

4 $\quad g>w,$

при этом, $p\nmid yz$ и для какого-то целого $t\geqslant 1$ $\;p^t\mid x$, но помним, что $p^{t+1}\nmid x$;

5 $\quad g\leqslant w,$

6 $g > w$,

при этом, $p \nmid xz$ и для какого-то целого $t \geqslant 1$ $p^t \mid y$, но помним, что $p^{t+1} \nmid y$;

7 $g \leqslant w$,

8 $g > w$,

при этом, $p \nmid xy$ и для какого-то целого $t \geqslant 1$ $p^t \mid z$, но помним, что $p^{t+1} \nmid z$.
Охарактеризуем вторую часть.

— Средства и методы, которые исследователь желает использовать при доказательстве ОУ, не должны конфликтовать с такими положениями:

aa) *Великая теорема будет автоматически считаться доказанной элементарным методом в том случае, если ОУ совокупно доказано элементарными средствами в частях* **A** *и* **B**.

ab) *Основное утверждение будет считаться полностью доказанным элементарными средствами в части* **A**, *если соответствующие доказательства проведены элементарными средствами для случаев, что совокупно удовлетворяют условиям подпунктов* **1**, **3**, **5** *и* **7**.

ac) *Основное утверждение будет считаться полностью доказанным элементарными средствами в части* **B**, *если соответствующие доказательства проведены элементарными средствами для случаев, что совокупно удовлетворяют условиям подпунктов* **2**, **4**, **6** *и* **8**.

I.6. Прототип Великой теоремы к части A.

Теорема E. *Для любых действительных чисел $l > 0$ и $r \geqslant 0$ и целого $k \geqslant 2$ имеет место*

$$\left(\frac{(l+r)^{k+1}-\frac{l^{k+1}}{4k}}{2}\right)^k > \left(\frac{(l+r)^k+\frac{l^{k+1}}{4k(l+r)}}{2}\right)^{k+1}.$$

Доказательству теоремы предпошлем доказательство следующего:

Предложение 1. *Для любого целого $k \geqslant 2$ имеет место*

$$2(4k)(4k-1)^k > (4k+1)^{k+1}. \tag{5}$$

Нижеприводимое короткое доказательство предложения 1 принадлежит неизвестному (мне) рецензенту мех. - мат. факультета КНУ им. Т. Г. Шевченко. Авторское решение прилагается.

Доказательство: Используя неравенство Бернулли, имеем

$$\left(\frac{4k-1}{4k+1}\right)^{k-1} = \left(1-\frac{2}{4k+1}\right)^{k-1} > 1-\frac{2k-2}{4k+1} = \frac{2k+3}{4k+1}, \quad \frac{8k(4k-1)^k}{(4k+1)^{k+1}} = \frac{8k(4k-1)}{(4k+1)^2}\times$$
$$\times\left(\frac{4k-1}{4k+1}\right)^{k-1} > \frac{8k(4k-1)}{(4k+1)^2}\times\frac{2k+3}{4k+1} = \frac{64k^3+80k^2-24k}{64k^3+48k^2+12k+1} > 1,\ k \geqslant 2. \ \square$$

Докажем ключевое утверждение для части A.

Доказательство теоремы E: Сначала докажем, что верны:

$$\left(\frac{(l+r)^k+\frac{(l+r)^k}{4k}}{2}\right)^{k+1} \geqslant \left(\frac{(l+r)^k+\frac{l^{k+1}}{4k(l+r)}}{2}\right)^{k+1}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{(l+r)^{k+1}-\frac{l^{k+1}}{4k}}{2}\right)^k \geqslant \left(\frac{(l+r)^{k+1}-\frac{(l+r)^{k+1}}{4k}}{2}\right)^k. \tag{7}$$

Пусть k, l и r удовлетворяют условию. Для (6) достаточно показать, что $\left((l+r)^k+\frac{(l+r)^k}{4k}\right)-\left((l+r)^k+\frac{l^{k+1}}{4k(l+r)}\right) \geqslant 0$ (иные требования: *уменьшаемое* и *вычитаемое* > 0, как видим, выполнены). Открыв большие скобки, имеем $(l+r)^k + \frac{(l+r)^k}{4k} - (l+r)^k - \frac{l^{k+1}}{4k(l+r)} = \frac{(l+r)^{k+1} - l^{k+1}}{4k(l+r)} \geqslant 0$, где равенство возможно только при $r = 0$. Аналогично для (7); достаточно показать, что $\left((l+r)^{k+1} - \frac{l^{k+1}}{4k}\right) - \left((l+r)^{k+1} - \frac{(l+r)^{k+1}}{4k}\right) \geqslant 0$ (иные требования, что *уменьшаемое* и *вычитаемое* > 0, как видим, выполнены). Открыв большие скобки, имеем: $(l+r)^{k+1} - \frac{l^{k+1}}{4k} - (l+r)^{k+1} + \frac{(l+r)^{k+1}}{4k} = \frac{(l+r)^{k+1} - l^{k+1}}{4k} \geqslant 0$, где равенство возможно только при $r = 0$.

Теперь, если в (5) умножить обе части на $\underline{\text{положительную}}$ величину $(l+r)^{(k+1)k} \big/ (8k)^{k+1}$ (подчеркнутое свойство дробного выражения выполнено в силу исходных условий), то получившееся неравенство совместно с (6) и (7) составит правильную цепь соотношений $\left(\frac{(l+r)^{k+1} - \frac{l^{k+1}}{4k}}{2}\right)^k \geqslant$

$$\geqslant \left(\frac{(l+r)^{k+1} - \frac{(l+r)^{k+1}}{4k}}{2}\right)^k > \left(\frac{(l+r)^k + \frac{(l+r)^k}{4k}}{2}\right)^{k+1} \geqslant \left(\frac{(l+r)^k + \frac{l^{k+1}}{4k(l+r)}}{2}\right)^{k+1}.$$

А отсюда вытекает утверждение теоремы. □

I.7. Вспомогательные леммы к части B.

Лемма 2. *Для любого целого $n \geqslant 3$ имеет место*

$$\sqrt[n]{4n} < 3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: По исходному условию, в силу утверждения задачи 220 в [6], имеем $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ и далее легко приходим к $\left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n(n+1)} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n(n+1)}$ или для всех $n \geqslant 3$ получаем верное неравенство

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

Подставляя сюда поочередно значения $n = 3, = 4, = 5$ и т. д., в итоге получаем бесконечную систему соотношений

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3+1]{3+1} &< \sqrt[3]{3}, \\ \sqrt[4+1]{4+1} &< \sqrt[4]{4}, \\ \sqrt[5+1]{5+1} &< \sqrt[5]{5}, \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Это с одной стороны. С другой стороны, так как при $n \geqslant 3$ есть $\frac{1}{n(n+1)} > 0$, то в силу известного свойства показательной функции имеем $4^{\frac{1}{n(n+1)}} > 1$ или

$$\sqrt[n+1]{4} < \sqrt[n]{4}.$$

Подставив поочередно $n = 3, = 4, = 5$ и т. д., наряду с (8), получим еще одну бесконечную систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3+1]{4} &< \sqrt[3]{4}, \\ \sqrt[4+1]{4} &< \sqrt[4]{4}, \\ \sqrt[5+1]{4} &< \sqrt[5]{4}, \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Одинаковый смысл неравенств (8), (9) с положительными значениями подкоренных выражений позволяет первое соотношение в (8) при сохранении смысла почленно перемножить с первым в (9), аналогично, второе в (8) с тем же в (9) и т. д.; осуществив эту процедуру, получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3+1]{4\times(3+1)} &< \sqrt[3]{4\times 3},\\
\sqrt[4+1]{4\times(4+1)} &< \sqrt[4]{4\times 4},\\
\sqrt[5+1]{4\times(5+1)} &< \sqrt[5]{4\times 5},\\
&\dots\\
\sqrt[n+1]{4(n+1)} &< \sqrt[n]{4\times n},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Заметив, что левая часть каждого неравенства равна правой части в очередном неравенстве, эту систему можно переписать так:

$\sqrt[3]{4\times 3} > \sqrt[4]{4\times 4} > \sqrt[5]{4\times 5} > \dots > \sqrt[n]{4\times n} > \dots$

С учетом $\sqrt[3]{4\times 3} < \sqrt[3]{27} = 3$, из этой цепи вытекает истинность леммы. □

Для получения еще одной леммы нам потребуется следующее

Вспомогательное предложение 2. *Для любого целого $k \geqslant 2$ имеет место*

$$\sqrt[k(k+1)]{4k(k+1)^{k+2}} > \sqrt[(k+1)(k+2)]{4(k+1)(k+2)^{k+3}}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Так, при $k \geqslant 2$ имеем цепь истинных соотношений $k+1 \geqslant 3 > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k}$ (здесь крайнее левое соотношение верно по условию, среднее – по утверждению задачи 220 из [6], крайнее правое – в силу $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k} > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k}$, где явно истинным есть $1+\frac{1}{k+1} > 1$), т. е. $\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}} > k+2$,иначе, имеем $\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}} > \sqrt[k+2]{(k+2)^{k+2}}$. Умножение его с $\sqrt[k]{k} \geqslant \sqrt[k+2]{k+2}$ (данное истинно при всех $k \geqslant 2$; так, при $k=2$ верны $\sqrt[2+2]{2+2} = 2^{\frac{2}{4}} = \sqrt{2}$, при $k \geqslant 3$ истинность вытекает из промежуточного результата в ходе доказательства леммы 2), даст $\sqrt[k]{k(k+1)^{k+1}} > \sqrt[k+2]{(k+2)^{k+3}}$. Если и его умножить с $\sqrt[k]{4(k+1)} > \sqrt[k+2]{4(k+1)}$ (а известное свойство показательной функции ведь даёт $\frac{(4k+4)^{\frac{1}{k}}}{(4k+4)^{\frac{1}{k+2}}} = (4k+4)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}} = (4k+4)^{\frac{2}{k(k+2)}} > 1$), в итоге получим $\sqrt[k]{4k(k+1)^{k+2}} > \sqrt[k+2]{4(k+1)(k+2)^{k+3}}$. Для завершения доказательства нужно из обеих частей полученного извлечь корень k+1 -ой степени.□

Первый шаг до заветной леммы сделан. Далее, заменой переменной упростим (10); положив $k = n-1$, оно примет форму

$\sqrt[(n-1)n]{4(n-1)n^{n+1}} > \sqrt[n(n+1)]{4n(n+1)^{n+2}}$, где $n \geqslant 3$. Придадим этому более удобный вид:

$$\sqrt[(n-1)n]{4(n-1)n^{n+1}} > \sqrt[((n+1)-1)(n+1)]{4((n+1)-1)(n+1)^{((n+1)+1)}}.$$

Этот доказанный результат утверждает, что в последовательности чисел $\sqrt[6]{4\times 2\times 3^4}$, $\sqrt[12]{4\times 3\times 4^5}$, $\sqrt[20]{4\times 4\times 5^6}$, …, $\sqrt[(n-1)n]{4(n-1)n^{n+1}}$, …каждое последующее *меньше* предыдущего. А поскольку первое число в последовательности *меньше* 3 (действительно, $\sqrt[6]{8 \times 3^4} < \sqrt[6]{3^2 \times 3^4} = 3$), значит и для всех чисел этой последовательности выполняется $\sqrt[(n-1)n]{4(n-1)n^{n+1}} < 3$. Таким образом, полностью доказано утверждение

Лемма 3. *Для любого целого* $n \geqslant 3$ *имеет место* $\sqrt[n(n-1)]{4(n-1)n^{n+1}} < 3$.

I.8. Прототип(-ы) Великой теоремы к части B.

(покамест недоказанные утверждения)

> Смешение необходимых и достаточных условий — кажется, основная слабость человеческого интеллекта.
> Г. М. Эдвардс.

Прототипы для подпунктов 2, 4, 6, 8, соответственно:

Гипотеза 1. *Пусть среди различных целых* x, y, z *лишь одно четно,* p *– простое* $\geqslant 3$, $p < x < z$, $p < y < z$, $z < y+x$. *Пусть также известно, что* $\sqrt[p]{y+x}$, $\sqrt[p]{z-x}$, $\sqrt[p]{z-y}$ *целые, а* $\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}$, $\frac{y}{\sqrt[p]{z-x}}$, $\frac{x}{\sqrt[p]{z-y}}$ *нечетные целые. Тогда*

a) $\sqrt[p]{y+x} = (z-x) + (z-y)$, *если* $\sqrt[p]{y+x}$ *нечетно*;

b) $\sqrt[p]{y+x} = \frac{(z-x)+(z-y)}{\sqrt[p]{\sqrt[p]{z-x}+\sqrt[p]{z-y}}}$, *если* $\sqrt[p]{y+x}$ *четно.*

Гипотеза 2. *Пусть среди различных целых* x, y, z *лишь одно четно,* p *– простое* $\geqslant 3$, $p < x < z$, $p < y < z$, $z < y+x$. *Пусть также известно, что* $\sqrt[p]{y+x}$, $\sqrt[p]{z-x}$, $\sqrt[p]{p(z-y)}$ *целые, а* $\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}$, $\frac{y}{\sqrt[p]{z-x}}$, $\frac{x}{\sqrt[p]{p(z-y)}}$ *нечетные целые. Тогда*

$$\sqrt[p]{y+x} = (z-x) + (z-y), \text{ причем, } \sqrt[p]{y+x} \text{ нечетно.}$$

Гипотеза 3. *Пусть среди различных целых* x, y, z *лишь одно четно,* p *– простое* $\geqslant 3$, $p < x < z$, $p < y < z$, $z < y+x$. *Пусть также известно, что* $\sqrt[p]{y+x}$, $\sqrt[p]{p(z-x)}$, $\sqrt[p]{z-y}$ *целые, а* $\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}$, $\frac{y}{\sqrt[p]{p(z-x)}}$, $\frac{x}{\sqrt[p]{z-y}}$ *нечетные целые. Тогда*

$$\sqrt[p]{y+x} = (z-x) + (z-y), \text{ причем, } \sqrt[p]{y+x} \text{ нечетно.}$$

Гипотеза 4. *Пусть среди различных целых* x, y, z *лишь одно четно,* p *– простое* $\geqslant 3$, $p < x < z$, $p < y < z$, $z < y+x$. *Пусть также известно, что* $\sqrt[p]{p(y+x)}$, $\sqrt[p]{z-x}$, $\sqrt[p]{z-y}$ *целые, а* $\frac{z}{\sqrt[p]{p(y+x)}}$, $\frac{y}{\sqrt[p]{z-x}}$, $\frac{x}{\sqrt[p]{z-y}}$ *нечетные целые. Тогда*

$$\sqrt[p]{p(y+x)} = \frac{(z-x)+(z-y)}{p}, \text{ причем, } \sqrt[p]{p(y+x)} \text{ нечетно.}$$

Вот несколько числовых примеров, подкрепляющих верность догадок в гипотезах 1 - 4:

$(p, x, y, z) = 3$, 5779251724, 5779253857, 5779253921 - к утв-нию a) гип. 1;
$(p, x, y, z) = 5$, 300512435138816204404325607944328113,
300512435138816204404325607972957263,
300512435138816204404325607972957264 - к утверждению b) гип. 1;
$(p, x, y, z) = 3$, 70710129, 70710632, 70710641 - к гип. 2;
$(p, x, y, z) = 3$, 14467132, 14467311, 14467375 - к гип. 3;
$(p, x, y, z) = 3$, 833113, 833624, 833625 - к гип. 4.

II. Решение Основного утверждения в части А.

То, что имеет основанием истину, следует
напоминать, не боясь показаться надоедливым.
Н. И. Пирогов.

II.1. Доказательство *ОУ для сл. пп.* 1: Предположим, что при усл. пп. 1 существует примитивная тройка $(x,\ y,\ z)$ с четным произведением xyz, удовлетворяющая (2). Фиксируем эти целые числа x, y, z и p, обозначив буквами a, b, c и h, соответственно. То есть, для некоторого сл. пп. 1 имеем:

$$b^h + a^h = c^h$$

и значит, по предложению N существуют пары $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$, что состоят из взаимно простых и не делящихся на h целых чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll} 1\prime)\ \ b+a=u_0^h, & 4\prime)\ \ \dfrac{b^h+a^h}{b+a}=v_0^h, & 7\prime)\ \ c=u_0v_0, \\ 2\prime)\ \ c-a=u_1^h, & 5\prime)\ \ \dfrac{c^h-a^h}{c-a}=v_1^h, & 8\prime)\ \ b=u_1v_1, \\ 3\prime)\ \ c-b=u_2^h, & 6\prime)\ \ \dfrac{c^h-b^h}{c-b}=v_2^h, & 9\prime)\ \ a=u_2v_2. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Сейчас покажем, что

$$a^{h-1} < v_0^h. \tag{12}$$

Воспользуемся одним из равенств (11).

$$\tfrac{b^h+a^h}{b+a} = b^{h-1} - b^{h-2}a + \ldots + b^{(h-1)-2m}a^{2m} - b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m+1} +$$
$$+ \ldots + a^{h-1} = V + a^{h-1} = v_0^h.$$

Достаточно показать, что многочлен V положителен. Да, если его записать так:

$$V = b^{h-2}(b-a) + \ldots + b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m}(b-a) + \ldots =$$
$$= (b-a)(b^{h-2} + \ldots + b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m} + \ldots) = (b-a)W,$$

то для данных a, b, h многочлен W, как видим, положителен, а ввиду $b > a$ (верно по условию), имеем $b - a > 0$. Вывод: $V > 0$. Верность (12) подтверждена.

Далее из (12) извлечем

$$\left(\tfrac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h. \tag{13}$$

Для этого в (4) положим $A = u_2^h$, $B = u_1^h$, $C = u_0^h$ и получим

$$\tfrac{u_0^h-u_1^h+u_2^h}{2} - u_2^h = \tfrac{u_0^h+u_1^h-u_2^h}{2} - u_1^h = u_0^h - \tfrac{u_0^h+u_1^h+u_2^h}{2} = \tfrac{u_0^h+u_1^h-u_2^h}{2} +$$
$$+ \tfrac{u_0^h-u_1^h+u_2^h}{2} - \tfrac{u_0^h+u_1^h+u_2^h}{2} = \tfrac{u_0^h+u_1^h+u_2^h}{2} - u_1^h - u_2^h = u_0^h - u_2^h -$$
$$- \tfrac{u_0^h+u_1^h-u_2^h}{2} = u_0^h - u_1^h - \tfrac{u_0^h-u_1^h+u_2^h}{2} = \tfrac{u_0^h-u_1^h-u_2^h}{2}. \tag{14}$$

С помощью 1/), 2/), 3/) находим:

$$a = \tfrac{u_0^h-u_1^h+u_2^h}{2},\ b = \tfrac{u_0^h+u_1^h-u_2^h}{2},\ c = \tfrac{u_0^h+u_1^h+u_2^h}{2}. \tag{15}$$

Заменив выражения в (14) соответствующими числами a, b, c из (15), имеем

$$a - u_2^h = b - u_1^h = u_0^h - c = b + a - c = c - u_1^h - u_2^h =$$
$$= u_0^h - u_2^h - b = u_0^h - u_1^h - a = \tfrac{u_0^h-u_1^h-u_2^h}{2}. \tag{16}$$

Так как $b + a - c > 0$ (см. предложение А) и $u_2^h > 0$ (см. условие ОУ и 3/)), то (16) влечет $a = u_2^h + \frac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}$, где оба слагаемых справа > 0. Теперь (12) можем записать так: $\left(u_2^h + \frac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h$. Разложив левую его часть по формуле бинома Ньютона, а затем, отбросив $h-1$ первых членов, в итоге имеем $\left(\frac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < \left(u_2^h + \frac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h$. Отсюда вытекает (13).

Отметим, что решение $(a,\, b,\, c)$ при фиксированном h только единожды возникает из (15). Действительно, u_0, u_1, u_2 однозначно определены числами a, b, c и h, так как имеем: $u_2 = \sqrt[h]{c-b}$, $u_1 = \sqrt[h]{c-a}$, $u_0 = \sqrt[h]{b+a}$. Из этих равенств, примитивности $(a,\, b,\, c)$ а также условий ОУ следует, что u_0, u_1, u_2 попарно взаимно просты и положительны, а произведение $u_0 u_1 u_2$ четно.

Теперь обоснуем, что для входящих в (13) u_0, u_1, u_2, h верно, что:

a) *имеет место* $\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + u_2^h)} > 0$;

b) *имеет место* $u_0 - \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + u_2^h)} \geqslant 0$.

Начнем с a). Так как h нечетно $\geqslant 3$, то в силу известных теорем: 1) есть $\sqrt[2n+1]{d} > 0$, если $d > 0$ и 2) есть $\sqrt[2n+1]{d} < 0$, если $d < 0$, достаточно показать: $4(h-1)(u_1^h + u_2^h) > 0$. Так как $h - 1 > 0$ и при $c > b > a$ (по условию) с учетом 2′), 3′), есть $u_1^h + u_2^h = (c-a) + (c-b) > 0$, то $4(h-1)(u_1^h + u_2^h) > 0$. Пункт a) доказан. Далее, по усл. пп. 1 выполнено $\sqrt[h]{b+a} \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]}$. Последнее, с учетом 1′), 2′), 3′), даст $u_0 \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + u_2^h)}$, что и влечет верность b).

Осуществим замену в (13). Для этого в (16) берём $u_0^h - c = c - (u_1^h + u_2^h)$, а с учетом 7′), c обращаем в $u_0 v_0$. Найдя v_0, получим $v_0 = \frac{u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + u_2^h}{u_0}}{2}$ (в знаменателе $u_0 \neq 0$ — это установлено выше). Замена в (13), окончательно даст:

$$\left(\frac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < \left(\frac{u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + u_2^h}{u_0}}{2}\right)^{h}.$$

Наступил момент истины. Действительно, если положить: $k = h - 1$, $l = \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + u_2^h)}$, $r = u_0 - \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + u_2^h)}$, где в соответствии с пунктами a), b) $l > 0$, $r \geqslant 0$ и *по рассмотрению* также k — целое $\geqslant 2$, то в силу теоремы E истинным является

$$\left(\frac{u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} > \left(\frac{u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + u_2^h}{u_0}}{2}\right)^{h}.$$

Противоречие! Значит вводное предположение ошибочно. Учтя произвольность в выборе решения $(x,\, y,\, z)$ уравнения (2) при усл. пп. 1, заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев пп.* 1. □

II.2. Случаи пп. 3, 5, 7 Основного утверждения доказываются аналогично. Полные тексты этих доказательств прилагаются.

Таким образом, элементарными методами полностью доказана без кавычек часть A знаменитой теоремы (см. пункт ab) в I.5 гл. I).

III. Доказательство Основного утверждения для части B (гипотетическое).

Двухкопеечным мыслям придам
сумасшедший размах.
Саша Черный.

III.1. Доказательство *ОУ для сл. пп.* 2 (гипотетическое): Предположим, что существует примитивная тройка (x, y, z) с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти числа x, y, z и p, обозначив a, b, c и h, соответственно. То есть, исходя из допущения ложности ОУ при усл. пп. 2, для этой четверки имеем:

$$b^h + a^h = c^h$$

и значит, по предложению N существуют пары $(u_0,\, v_0)$, $(u_1,\, v_1)$, $(u_2,\, v_2)$, состоящие из взаимно простых не делящихся на h целых чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll} 1\prime)\ b+a=u_0^h, & 4\prime)\ \dfrac{b^h+a^h}{b+a}=v_0^h, & 7\prime)\ c=u_0v_0,\\[2ex] 2\prime)\ c-a=u_1^h, & 5\prime)\ \dfrac{c^h-a^h}{c-a}=v_1^h, & 8\prime)\ b=u_1v_1,\\[2ex] 3\prime)\ c-b=u_2^h, & 6\prime)\ \dfrac{c^h-b^h}{c-b}=v_2^h, & 9\prime)\ a=u_2v_2. \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Судя по крайним колонкам (17), ясно, что из четности одного из попарно взаимно простых чисел a, b, c (имеем по условию) и взаимной простоты чисел в парах $(u_0,\, v_0)$, $(u_1,\, v_1)$, $(u_2,\, v_2)$ (выведена из допущения) вытекает *четность* только одного из чисел u_0, u_1, u_2 и *нечетность* чисел v_0, v_1, v_2 (заключение – 'наводной мостик' к гип. 1). Согласно описанию I. 5 главы I, остается рассмотреть варианты: u_0 *четно* и *нечетно*.

Пусть гипотеза 1 истинна. Пусть u_0 нечетно, тогда u_1, u_2 с разной четностью (см. выше). Так как $u_1 > u_2 > 0$ (по условию есть $c > b > a$, значит $(c-a)-(c-b) = (b-a) > 0$, а учтя 2$\prime$), 3$\prime$), есть $u_1 = \sqrt[h]{c-a} > \sqrt[h]{c-b} = u_2 > 0$), то $u_1 \geqslant 2$, следовательно, $u_1^{h-1} > 3$ и согласно леммы 2 имеем $\sqrt[h]{4h} < u_1^{h-1}$ или $4h < \left(u_1^h\right)^{h-1}$. Учтя явные: $\left(u_1^h\right)^{h-1} < \left(u_1^h+u_2^h\right)^{h-1}$, $4(h-1) < 4h$, получим $4(h-1) < \left(u_1^h+u_2^h\right)^{h-1}$ или $\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h+u_2^h)} < u_1^h+u_2^h$. Помня о нечетности u_0 и 'наводном мостике', воспользуемся гип. 1; полагая в ней $x=a$, $y=b$, $z=c$, $p=h$ и учтя 1$\prime$), 2$\prime$), 3$\prime$), окончательно получим:

$$\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h+u_2^h)} < u_1^h+u_2^h = (c-a)+(c-b) = \sqrt[h]{b+a} = u_0.$$

Здесь противоречие, так как для пп. 2 изначально выполняется

$$\sqrt[h]{b+a} < \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]} = \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h+u_2^h)}.$$

Пусть u_0 четно. Тогда u_1, u_2 нечетны (см. выше). Так как $u_1 > u_2 > 0$ (тж. см. выше), то $u_1 \geqslant 3$, если $h \geqslant 5$ и u_1 строго больше 3, если $h = 3$. Следовательно, в силу леммы 2 имеем $\sqrt[h]{4h} < u_1$ или $4h < u_1^h$. Это и эти: $4(h-1) < 4h$, $u_1^h < u_1^h + u_2^h$ (ведь верны), порождают $4(h-1) < u_1^h + u_2^h$, что с очевидным $u_1^h + u_2^h \leqslant \left(u_1^h+u_2^h\right)^{h-2}$ даст $4(h-1) < \left(u_1^h+u_2^h\right)^{h-2}$. Умножив его с верным $(u_1^h+u_2^h)(u_1+u_2) < \left(u_1^h+u_2^h\right)^2$ (ведь $u_1 \geqslant 3$ и $h \geqslant 3$), получим

$4(h-1)(u_1^h+u_2^h)(u_1+u_2)<\left(u_1^h+u_2^h\right)^h$ или $\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h+u_2^h)}<\frac{u_1^h+u_2^h}{\sqrt[h]{u_1+u_2}}$. Помня о четности u_0 и 'наводном мостике', воспользуемся гип. 1; полагая в ней $x=a$, $y=b$, $z=c$, $p=h$ и учтя 1$\prime$), 2$\prime$), 3$\prime$), окончательно получим:

$$\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h+u_2^h)}<\frac{u_1^h+u_2^h}{\sqrt[h]{u_1+u_2}}=\frac{(c-a)+(c-b)}{\sqrt[h]{\sqrt[h]{c-a}+\sqrt[h]{c-b}}}=\sqrt[h]{b+a}=u_0.$$

И здесь противоречие, так как для пп. 2 изначально выполняется

$$\sqrt[h]{b+a}<\sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]}=\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h+u_2^h)}.$$

Подытожим проделанное. Из допущения ложности ОУ при усл. пп. 2 сперва было выведено существование пар целых чисел $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$, при которых одновременно имеют место 9 равенств в (17). Затем, приведением к противоречию, четко показано, что при усл. пп. 2 вообще не существует пар целых чисел $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$, удовлетворяющих хотя бы 6-ти равенствам в (17). Таким образом, получено два взаимоисключающих умозаключения. На основании этого констатируем: вводное предположение ошибочно. Учитывая произвольность в выборе решения для (2) при усл. пп. 2, заключаем: *ОУ истинно для всех сл. пп.* 2 $-$**конец гипотетического доказательства ОУ для пп. 2**.

III.2. Доказательство *Основного утверждения для случаев подпункта* 4 (гипотетическое): Предположим, что в рамках условий пп. 4 существует примитивная тройка $(x,\ y,\ z)$ с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти целые числа x, y, z, p и t, обозначив буквами a, b, c, h и j, соответственно. То есть, для некоторого случая пп. 4 имеем:

$$b^h+a^h=c^h$$

и значит, по предложению X существуют пары $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$, состоящие из взаимно простых не делящихся на h целых чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll}
1\prime)\ \ b+a=u_0^h, & 4\prime)\ \ \dfrac{b^h+a^h}{b+a}=v_0^h, & 7\prime)\ \ c=u_0v_0,\\[2mm]
2\prime)\ \ c-a=u_1^h, & 5\prime)\ \ \dfrac{c^h-a^h}{c-a}=v_1^h, & 8\prime)\ \ b=u_1v_1,\\[2mm]
3\prime)\ \ c-b=h^{jh-1}u_2^h, & 6\prime)\ \ \dfrac{c^h-b^h}{c-b}=hv_2^h, & 9\prime)\ \ a=h^ju_2v_2.
\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Судя по крайним колонкам (18), ясно, что из четности одного из попарно взаимно простых чисел a, b, c (имеем по условию), взаимной простоты чисел в парах $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$ (выведена из допущения) и нечетности h вытекает *четность* только одного из чисел u_0, u_1, u_2 и *нечетность* чисел v_0, v_1, v_2 (заключение $-$ 'наводной мостик' к гип. 2). Следуя описанию I. 5 главы I, остается рассмотреть варианты: u_0 *четно* и *нечетно.*

Пусть гипотеза 2 истинна. Пусть u_0 нечетно. Поскольку h делит h^ju_2, то $h^ju_2\geqslant 3$, а следовательно, есть $h^{j(h-2)}u_2^{h-2}\geqslant h^ju_2\geqslant 3$ и согласно леммы 2 имеем $\sqrt[h]{4h}<\left(h^ju_2\right)^{h-2}$. Отсюда легко получим

$$4h<\left(h^ju_2\right)^{h(h-2)}. \qquad (19)$$

Так как $h(h-2)<h(h-1)$ (это очевидно) и $jh(h-2)<(jh-1)(h-1)$

(с учетом $j \geqslant 1$, имеем: $(jh-1)(h-1) - jh(h-2) = h(j-1)+1 \geqslant 1 > 0$), то $h^{jh(h-2)}u_2^{h(h-2)} < h^{(jh-1)(h-1)}u_2^{h(h-1)}$ и (19) даст $4h < \left(h^{jh-1}u_2^h\right)^{h-1}$. Учтя очевидные: $\left(h^{jh-1}u_2^h\right)^{h-1} < \left(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h\right)^{h-1}$, $4(h-1) < 4h$, получим $4(h-1) < \left(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h\right)^{h-1}$ или $\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)} < u_1^h + h^{jh-1}u_2^h$. Помня о нечетности u_0 и 'наводном мостике', воспользуемся гипотезой 2; полагая в ней $x = a$, $y = b$, $z = c$, $p = h$ и учтя 1/), 2/), 3/) в (18), окончательно получим:

$$\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)} < u_1^h + h^{jh-1}u_2^h = (c-a) + (c-b) = \sqrt[h]{b+a} = u_0.$$

Здесь противоречие, так как для пп. 4 изначально выполняется

$$\sqrt[h]{b+a} < \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]} = \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)}.$$

Пусть u_0 четно. Тогда u_1, u_2 нечетны. А так как: $u_0 = \sqrt[h]{b+a}$ =целое, $u_1 = \sqrt[h]{c-a}$ =целое, $h^j u_2 = \sqrt[h]{h(c-b)}$ =целое (см. 1/), 2/), 3/) в (18), соответственно) и одновременно есть: $\frac{c}{u_0} = \frac{c}{\sqrt[h]{b+a}} = v_0$ =целое нечетное, $\frac{b}{u_1} = \frac{b}{\sqrt[h]{c-a}} = v_1$ =целое нечетное, $\frac{a}{h^j u_2} = \frac{a}{\sqrt[h]{h(c-b)}} = v_2$ =целое нечетное (см. 7/), 8/), 9/) в (18), соответственно), то заключение гипотезы 2 (а прочие ее посылки имеют место) однозначно указывает, что u_0, вопреки нашему рассмотрению, обязано быть нечетным. Таким образом, доказана несовместность равенств 1/), 2/), 3/), 7/), 8/), 9/) в (18) при четном u_0.

Подытожим проделанное. Сперва, из допущения о ложности Основного утверждения при условиях пп. 4, было выведено существование пар целых чисел (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), при которых одновременно имеют место 9 равенств в (18). Затем, приведением к противоречию, четко показано, что при условиях пп. 4 вообще не существует пар целых чисел (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), удовлетворяющих хотя бы 6-ти равенствам из (18). Таким образом, получено два взаимоисключающих умозаключения. С посыланием на этот факт, констатируем: вводное предположение ошибочно. Учитывая произвольность в выборе решения (x, y, z) уравнения (2) в усл. пп. 4, заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев пп.* 4 – **конец гипотетического доказательства ОУ для подпункта 4**.

III.3. Рассуждения в гипотетическом решении Основного утверждения для подпункта 6 абсолютно такие же, как для подпункта 4. Поэтому воспроизводить его здесь нет смысла. Полный текст решения прилагается.

III.4. Доказательство *Основного утверждения для случаев подпункта* 8 (гипотетическое): Предположим, что при усл. пп. 8 существует примитивная тройка (x, y, z) с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти целые числа x, y, z, p и t, обозначив буквами a, b, c, h и j, соответственно. То есть, для некоторого случая пп. 8 имеем:

$$b^h + a^h = c^h$$

и значит, по предложению Z существуют пары (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), состоящие из взаимно простых не делящихся на h целых чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll} 1\prime)\ b+a=h^{jh-1}u_0^h, & 4\prime)\ \dfrac{b^h+a^h}{b+a}=hv_0^h, & 7\prime)\ c=h^ju_0v_0, \\ 2\prime)\ c-a=u_1^h, & 5\prime)\ \dfrac{c^h-a^h}{c-a}=v_1^h, & 8\prime)\ b=u_1v_1, \\ 3\prime)\ c-b=u_2^h, & 6\prime)\ \dfrac{c^h-b^h}{c-b}=v_2^h, & 9\prime)\ a=u_2v_2. \end{array}\right\} \quad (20)$$

Судя по крайним колонкам (20), ясно, что из четности одного из попарно взаимно простых чисел a, b, c (имеем по условию), взаимной простоты чисел в парах (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2) (выведена из допущения) и нечетности h вытекает *четность* только одного из чисел u_0, u_1, u_2 и *нечетность* чисел v_0, v_1, v_2 (заключение – 'наводной мостик' к гип. 4). Следуя описанию I. 5 главы I, остается рассмотреть варианты: u_0 *четно* и *нечетно*.

Пусть гип. 4 верна. Пусть u_0 нечетно, тогда у u_1, u_2 разная четность (см. выше) и так как $u_1 > u_2 > 0$ (по условию есть $c > b > a$, значит $(c-a)-(c-b) = (b-a) > 0$, а потому, учтя 2$\prime$), 3$\prime$) в (20), имеет место $u_1 = \sqrt[h]{c-a} > \sqrt[h]{c-b} = u_2 > 0$), то $u_1 \geqslant 2$.

После получения новой посылки, а именно: $u_1 \geqslant 2$, дальнейшие рассуждения для доказываемого варианта u_0= нечетно будут раздельными для таких случаев:

1) $u_1 = 2$ при $h = 3$;
2) $u_1 = 2$ при $h \geqslant 5$;
3) $u_1 \geqslant 3$ при $h \geqslant 3$.

Итак, *случай* 1). Поскольку $u_1 > u_2 > 0$ (см. выше), то $u_2 = 1$. В оборот берём значения u_1, u_2, h и с помощью 1$\prime$), 2$\prime$), 3$\prime$) находим c, а используя 7$\prime$), в итоге имеем

$$2c = 3^{3j-1}u_0^3 + 2^3 + 1 = 3^{3j-1}u_0^3 + 3^2 = 2 \times 3^j u_0 v_0. \qquad (21)$$

Пристальное рассмотрение (21) показывает, что u_0 сомножитель числа 3^2, с другой стороны, по утверждению предложения Z числа u_0 и 3 взаимно просты. Следовательно, $u_0 = 1$ и только так. Промежуточный итог – мы имеем: $h = 3$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$. Снова возвращаемся к (21), чтобы добыть информацию и про j. Зная сейчас, что $u_0 = 1$, перепишем (21) так:

$$2c = 3^2(3^{3(j-1)} + 1) = 2 \times 3^j v_0.$$

Отсюда с очевидностью следует, что $3^{3(j-1)} + 1$ не делится на 3 ни при каких $j \geqslant 1$ (не забываем, что $m^0 = 1$). А так как по предложению Z число v_0 также взаимно просто с 3, заключаем: $3^2 = 3^j$. Ясно, что $j = 2$. Теперь имеется полный комплект чисел: $h = 3$, $j = 2$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ и по нему уже можно вычислить весь набор (h, a, b, c). Вычисление даст: (h, a, b, c)=(3, 118, 125, 126). Обратим взор на число b, равное 125. Как выдим, оно нечетное, а должно бы быть четным, так как по условию этого рассмотрения число b содержит четный сомножитель u_1, равный 2. Противоречие!

Случай 2). Так как $u_1 > u_2 > 0$ (см. выше), то $u_2 = 1$. В оборот берём значения u_1, u_2 и с помощью 1′), 2′), 3′) находим c, а используя 7′), в итоге имеем

$$2c = h^{hj-1}u_0^h + 2^h + 1 = 2h^j u_0 v_0.$$

Уменьшив все части этих равенств на $h^{jh-1}u_0^h$, в итоге будем иметь:

$$2c - h^{jh-1}u_0^h = (2^h - 2) + 3 = h(2h^{j-1}u_0v_0 - h^{hj-2}u_0^h), \tag{22}$$

А вот сейчас покажем, что (22) вообще лишено смысла при любом простом h, больше 3. Действительно, применив одну из форм малой теоремы Ферма к выражению в круглых скобках средней части (22) и помня, что для *всех простых* $h \geqslant 5$ НОД $(h, 3){=}1$, равенства (22) удивительным образом превратились в по-настоящему истинные соотношения:

$$2c - h^{jh-1}u_0^h \neq h \times K_h + 3 \neq h(2h^{j-1}u_0v_0 - h^{hj-2}u_0^h),$$

где h простое $\geqslant 5$, $K_h = \frac{2^h-2}{h}$ = целое, u_0, v_0 целые, h сомножитель c. Противоречие!

Случай 3). Коль есть $u_1 \geqslant 3$, $h \geqslant 3$, то в силу утверждения леммы 3 есть $\sqrt[h(h-1)]{4(h-1)h^{h+1}} < u_1$ или $4(h-1)h^{h+1} < \left(u_1^h\right)^{h-1}$. Последнее, с учетом очевидного соотношения $\left(u_1^h\right)^{h-1} < \left(u_1^h + u_2^h\right)^{h-1}$, даст следующее $4(h-1)h^{h+1} < \left(u_1^h + u_2^h\right)^{h-1}$ или $4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)h^h < \left(u_1^h + u_2^h\right)^h$ или $\sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)} < \frac{u_1^h+u_2^h}{h}$. Помня о четности u_0 и 'наводном мостике', воспользуемся гипотезой 4; полагая в ней $x = a$, $y = b$, $z = c$, $p = h$ и учтя 1′), 2′), 3′), окончательно получим:

$\sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)} < \frac{u_1^h+u_2^h}{h} = \frac{(c-a)+(c-b)}{h} = \sqrt[h]{h(b+a)} = h^j u_0.$

Здесь противоречие, так как для пп. 8 изначально выполняется

$\sqrt[h]{b+a} < \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]} = \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + u_2^h)},$

что равносильно выполнению этого:

$\sqrt[h]{h(b+a)} < \sqrt[h]{4h(h-1)[(c-a)+(c-b)]} = \sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)}.$

С *нечетным* u_0 закончили.

Пусть u_0 четно. Так как: $h^j u_0 = \sqrt[h]{h(b+a)}$ =целое, $u_1 = \sqrt[h]{c-a}$=целое, $u_2 = \sqrt[h]{c-b}$ =целое (см. 1′), 2′), 3′) в (20), соответственно) и одновременно есть: $\frac{c}{h^j u_0} = \frac{c}{\sqrt[h]{h(b+a)}} = v_0$ =целое нечетное, $\frac{b}{u_1} = \frac{b}{\sqrt[h]{c-a}} = v_1$ =целое нечетное, $\frac{a}{u_2} = \frac{a}{\sqrt[h]{c-b}} = v_2$ =целое нечетное, (см. 7′), 8′), 9′) в (20), соответственно), то заключение гип. 4 при наличии прочих ее посылок однозначно утверждает, что u_0, вопреки нашему рассмотрению, обязано быть нечетным. Таким образом, доказана несовместность равенств 1′), 2′), 3′), 7′), 8′), 9′) в (20) при четном u_0.

Подытожим проделанное. Сперва, из допущения о ложности Основного утверждения при условиях пп. 8, было выведено существование пар целых чисел (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), при которых одновременно имеют место 9 равенств в (20). Затем, приведением к противоречию, четко показано, что при условиях пп. 8 вообще не существует пар целых чисел (u_0, v_0),

$(u_1,\, v_1)$, $(u_2,\, v_2)$, удовлетворяющих хотя бы 6-ти равенствам из (20). Таким образом, получено два взаимоисключающих умозаключения. С посыланием на этот факт, констатируем: вводное предположение ошибочно. Учитывая произвольность в выборе решения $(x,\ y,\ z)$ уравнения (2) в усл. пп. 8, заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев пп.* 8 – **конец гипотетического доказательства ОУ для подпункта 8**.

Третья глава завершена. Таким образом, заявленные цели достигнуты.

Выводы: В данной статье действительно представлен новый подход к штурму ВТ элементарными методами. Новизна видна при таком сравнении: приложившиеся к ВТ предшественники, начиная с Эйлера (Уайлс не в счет), направляли свои усилия на поиски удобных форм представления второго сомножителя числа z, а затем под эти формы находили достаточные условия, позволившие доказать ВТ для ограниченного класса показателей. Здесь упор сделан на разчленение условия ВТ на две независимые части А и В, а посредством рассмотрения всех случаев первого сомножителя z на формулах Абеля показывается несовместность 7-ми (косвенно) равенств 1′), 2′), 3′), 4′), 7′), 8′), 9′) при выполнении условий части А (здесь полезно учитывать числовые примеры к гип. 1-4) и несовместность 6-ти равенств 1′), 2′), 3′), 7′), 8′), 9′) при выполнении условий части В.

Второй вывод напрашивается сам собою: затронутый аспект предмета рассмотрения ещё сохраняет актуальность; для доказательной силы результатов главы III не достает лишь доказательств гипотез 1 - 4 (и в скобках дополним: есть уверенность, что среди читателей объявится тот, кто в решениях всех гипотез поставит последнюю жирную точку). Обратите внимание! Анонсирован новый текущий результат от 12 февраля 2013 года (см. хронологию результатов ниже).

Без всяких скобок добавим: автор смог бы совершить экскурс в докуммерову эпоху в истории Великой теоремы и указать позицию, в которой Нильс Абель по досадному недосмотру пропустил замечательную идею, что привела бы его, по меньшей мере, к аналогичному решению, а по большому счету, возможно, к полному решению Великой теоремы Ферма. Очень верится, что для историков математики смысл этого подтекста когда-то также станет привлекательным.

За моральную поддержку благодарю Е. Н. Цимбаленко. Особенно я признателен сотрудникам филиала Сохнут- Украина в городе Харькове и области Александру Кривоносову, Ирине Железняковой, Артему Кобзану за бескорыстную техническую помощь в оформлении этой статьи. Арсенал благодарственных слов адресую гендиректору оздоровительной базы „Элат“ Леониду Чумаченко, ибо эта статья вовсе бы не появилась без его любезного приглашения на базу и создание хороших условий для работы над статьей.

Список литературы.

1. Г. М. Эдвардс. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алге-

браическую теорию чисел. Пер. с англ. под ред. Б. Ф. Скубенко.-М.: Мир, 1980.-488 с.
2. Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах./ под ред. И. Г. Башмаковой.– М.: Наука, 1974.
3. М. М. Постников. Введение в теорию алгебраических чисел.– М.: Наука, 1982.-240 с.
4. Ю. А. Петров. Предмет теории.//Вестн. Моск. Ун-та, Сер. 7, 1999, 1.
5. П. Рибенбойм. Последняя теорема Ферма для любителей. Пер. с англ. под ред. В. Н. Чубарикова.- М.: Мир, 2003.-429 с., ил.
6. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.– М.: Наука, 5-ое изд., перераб, 1977.-384 с.

Написано 18 октября 2010 г., г. Харьков.
Вставка на стр. 17 от 14 февраля 2013 г., г. Харьков.
Вставка куска текста на стр. 18, 19 от 3 марта 2013 г., г. Харьков.

Хронология текущих результатов:

•август 1984 г. – 28 декабря 1989 г.: накопление огромного эмпирического материала для гипотез 1-4; доказательство первого прототипа в чуть слабом варианте; обнаружение тождественных равенств.
•июнь 2001 г. – 19 августа 2001 г.: написание полного текста решения ВТ для первой части с использованием слабой версии прототипа.
•сентябрь 2003 г. – 23 ноября 2003 г.: доказательство сильной версии первого прототипа (она здесь; см. Дополнение к I.6).
•ноябрь 2003 г. – март 2004 г.: написание полного текста решения ВТ для первой части с использованием сильной версии прототипа.
•12 февраля 2010 г. – 29 марта 2010 г.: написание полных текстов гипотетических решений для 3-х из 4-х случаев второй части ВТ.
•сентябрь – 4 октября 2010 г.: доказательство вспомогательных средств для гипотетического решения последнего случая второй части ВТ.
•5 октября – 18 октября 2010 г.: написание полного текста гипотетического решения для последнего случая второй части ВТ.
•19 октября 2010 г. – 25 июня 2011 г.: доказано утверждение b) гип. 1.
•26 июня 2011 г. – 12 февраля 2013 г.: доказано утверждение a) гип. 1. Тем самым, полностью без кавычек доказан Случай I Великой теоремы Ферма элементарными средствами. Ниже приводится полный текст док-ва гип. 1, в частности, без док-в приведена формулировка только одной из трех используемых лемм (это моя защита от возможных плагиаторов). Две другие формулировки и полные тексты док-в используемых лемм к гип. 1 не будут обнародованы, пока не опубликуют надлежаще подготовленную уже статью (добавится текст на 4 с половиной страницы).
•13 февраля 2013 г. – хх месяц хххх г.: ... (?)

Вставка текста: док-во гипотезы 1 без

доказательств трех лемм.

Лемма 4. *Для каждой пары целых простого $p \geqslant 3$ и $m \geqslant 1$ существует $\frac{1}{2}(4m-2)^p$ троек $(\delta,\ \lambda,\ \tau)$, состоящих из целых $\delta,\ \lambda,\ \tau$ с четным τ и разными нечетными $\delta,\ \lambda$, $\delta+\lambda>\tau$, $\tau>\delta>p$, $\tau>\lambda>p$, что*

$\sqrt[p]{\tau-\lambda}$, $\sqrt[p]{\tau-\delta}$, $\sqrt[p]{\lambda+\delta}$ *целые;*

$\frac{\tau}{\sqrt[p]{\lambda+\delta}}$ *нечетное целое;*

$(4m-2)^p = \sqrt[p]{\tau-\delta}+\sqrt[p]{\tau-\lambda}$;

причем, любой пакет из $\frac{1}{2}(4m-2)^p$ троек, сформированный заданными m и p, содержит, по меньшей мере, два комплекта $(\delta,\ \lambda,\ \tau)$, отличающихся лишь переставленными нечетными числами, что также выполнено:

$\frac{\lambda}{\sqrt[p]{\tau-\delta}}$, $\frac{\delta}{\sqrt[p]{\tau-\lambda}}$ *нечетные целые.*

Доказательство гип. 1: В $C-\frac{C+B+A}{2}=\frac{C+B+A}{2}-B-A=\frac{C-B-A}{2}$ (см. I.4) положим $A=z-y$,$B=z-x$,$C=y+x$ и придадим нужные формы:

$$\sqrt[p]{y+x}((\sqrt[p]{y+x})^{p-1}-\tfrac{z}{\sqrt[p]{y+x}}) = \sqrt[p]{y+x}\times\tfrac{z}{\sqrt[p]{y+x}}-((z-x)+(z-y)) = \\ = \frac{(\sqrt[p]{y+x})^p-((z-x)+(z-y))}{2}. \qquad (8)$$

Левое равенство в (8) показывает, что $\frac{(z-x)+(z-y)}{\sqrt[p]{y+x}}$ целое. Обозначим его K и сделаем это K в (8) явным; так или иначе, в итоге получаем:

$$(\sqrt[p]{y+x})^{p-1}-\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}=\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}-K=\frac{(\sqrt[p]{y+x})^{p-1}-K}{2}. \qquad (9)$$

Пусть $\sqrt[p]{y+x}$ четно. Поскольку $\sqrt[p]{y+x}$ и $\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}$ разной четности, то по левой части (9) K четно, по правой – K имеет, к тому же, вид $2(2r-1)$ (при K вида $4r$ справа в (9) нелепость: *нечетное* = *четное*). Итак,

$$\sqrt[p]{y+x}=\frac{(z-x)+(z-y)}{4r-2},\ r=1,\ 2,\ \ldots \qquad (10)$$

Осталось корректно отобразить $4r-2$ в (10) числами x, y, z и p. По лемме 4 для любой пары $(r,\ p)$ имеется минимум 1 тройка $(x,\ y,\ z)$, для которой, наряду с тем, что выполнены все условия доказываемого утверждения, есть и $4r-2=\sqrt[p]{\sqrt[p]{z-x}+\sqrt[p]{z-y}}$ (в лемме утверждается, что это есть даже если ложны: $\frac{y}{\sqrt[p]{z-x}}$ =, $\frac{x}{\sqrt[p]{z-y}}$ =*нечетное целое*). Итак, (10) даёт первое требуемое.

Пусть $\sqrt[p]{y+x}$ нечетно. Поскольку $\sqrt[p]{y+x}$ и $\frac{z}{\sqrt[p]{y+x}}$ нечетны, то по левой части (9) K нечетно, по правой части (9) – K имеет, к тому же, вид $4r-3$ (при K вида $4r-1$ справа в (9) нелепость: *четное* = *нечетное*). Итак,

$$K=\frac{(z-x)+(z-y)}{\sqrt[p]{y+x}},\ \text{где } K \text{ вида } 4r-3. \qquad (11)$$

Осталось показать, что $K=1$. По леммам 5, 6 совокупно для каждого простого $p\geqslant 3$ существует сколь угодно много троек $(x,\ y,\ z)$, для которых, наряду с тем, что без исключений выполнены условия доказываемого утверждения, есть и $\frac{(z-x)+(z-y)}{\sqrt[p]{y+x}}=1$. Итак, (11) даёт второе требуемое. □

Этот результат придает доказательную силу гипотетическому решению для подпункта 2 гл. III. Значит, элементарными средствами без кавычек полностью доказан Случай I Великой теоремы Ферма (см. I.5 гл. I).

Дополнение к I. 6.

Авторское док-во предложения **1** из **I. 6.** без примен. нер-ва Бернулли (здесь оно под номером **9a**).

Предложение 1a. *Для любого целого $n \geqslant 2$ имеет место*

$$8nC_{2n+1}^{2n} > 3.$$

Доказательство: Пусть n — целое $\geqslant 2$. Имеем:

$$8nC_{2n+1}^{2n} = 8n(2n+1) > 8 > 3. \ \square$$

Предложение 2a. *Для любого целого $n \geqslant 2$ имеет место*

$$8n > 3C_{2n+1}^{1}. \tag{23}$$

Доказательство: Пусть n — целое $\geqslant 2$. Имеем: $2n > 3$. Прибавив к обеим частям $6n$, получим искомое (23). $\square$

Предложение 3a. *Для любых целых $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant m < n$ имеет место*

$$8nC_{2n+1}^{2m} > 3C_{2n+1}^{2m+1}.$$

Доказательство: Очевидно, при $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant m < n$ есть $2m(8n+3) > 0$. Сложение его с (23), даст $2m(8n+3)+8n > 3(2n+1)$. Обе части последнего неравенства домножим на $A = \frac{(2n+1)!}{(2m+1)![2(n-m)+1]!}$, где $k! = 1 \times 2 \times 3 \ldots (k-1)k$; поскольку при $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant m < n$ есть $A > 0$, то, так или иначе, получим $A\{2m(8n+3)+8n-3(2n+1)\} > 0$. Преобразование в фигурных скобках, далее даст $A\{8n(2m+1)-3[2(n-m)+1]\} > 0$. После открытия этих скобок и возможных упрощений, так или иначе, получим $8n \times \frac{(2n+1)!}{(2m)![2(n-m)+1]!} > 3 \times \frac{(2n+1)!}{(2m+1)![2(n-m)]!}$, что по сути является искомым соотношением, так как: $\frac{(2n+1)!}{(2m)![2(n-m)+1]!} = \frac{(2n+1)!}{(2m)![(2n+1)-2m]!} = C_{2n+1}^{2m}$ и $\frac{(2n+1)!}{(2m+1)![2(n-m)]!} = \frac{(2n+1)!}{(2m+1)![(2n+1)-(2m+1)]!} = C_{2n+1}^{2m+1}$. $\square$

Предложение 4a. *Для любого целого $n \geqslant 2$ имеет место*

$$2(8n-1)^{2n+1} > (8n+1)^{2n+1}. \tag{24}$$

Доказательство: Достаточно убедиться в верности

$$2(8n-1)^{2n+1} - (8n+1)^{2n+1} > 0. \tag{25}$$

С этой целью дважды воспользуемся формулами бинома Ньютона для нечетных показателей. Применяя их, по отдельности получаем:

$$2(8n-1)^{2n+1} = 2(8n)^{2n+1} - 2C_{2n+1}^{1}(8n)^{2n} + \ldots +$$
$$+2C_{2n+1}^{2m}(8n)^{2n-2m+1} - 2C_{2n+1}^{2m+1}(8n)^{2n-2m} + \ldots + 2C_{2n+1}^{2n}(8n)^{1} - 2,$$
$$(8n+1)^{2n+1} = (8n)^{2n+1} + C_{2n+1}^{1}(8n)^{2n} + \ldots +$$
$$+C_{2n+1}^{2m}(8n)^{2n-2m+1} + C_{2n+1}^{2m+1}(8n)^{2n-2m} + \ldots + C_{2n+1}^{2n}(8n)^{1} + 1,$$

где при фиксированном $n \geqslant 2$ целое m последовательно пробегает все значения в границах $1 \leqslant m < n$.

Согласно знаку между степенями в (25) найдем разность правых частей предпоследнего и последнего равенств; по завершении операции, получим

$$(8n)^{2n}\left[8n - 3C_{2n+1}^{1}\right] + \ldots + (8n)^{2n-2m}\left[8nC_{2n+1}^{2m} - 3C_{2n+1}^{2m+1}\right] +$$
$$+ \ldots + \left[8nC_{2n+1}^{2n} - 3\right]. \tag{26}$$

Осталось показать, что при целых $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant m < n$ многочлен (26) положителен. Действительно, при этих значениях для n и m сомножители за пределами квадратных скобок в (26), очевидно, положительны. По утверждениям предложений **2a** и **1a** также положительны разности в крайних слева и крайних справа квадратных скобок, соответственно. По утверждению предложения **3a** положительны разности в квадратных скобках у всех $n-1$ внутренних членов (26). Из установленного следует: при $n \geqslant 2$ многочлен (26) положителен. А это далее влечет верность (25)(ибо по преобразованию (26) и левая часть (25) тождественно равны). По вводному замечанию вправе заключить: утверждение истинно. □

Предложение 5a. *Для любого целого $n \geqslant 1$ имеет место*

$$2(8n)(8n-1)^{2n} > (8n+1)^{2n+1}. \qquad (27)$$

Доказательство: Установим истинность утверждения для $n = 1$; осуществив в (27) подстановку $n = 1$, видим, что неравенство $2 \times 8 \times 7^2 = 784 > 729 = 9^3$ верно. Аналогичный факт установим для $n \geqslant 2$. Пусть $n \geqslant 2$. Тогда $2(8n)(8n-1)^{2n} > 2(8n-1)(8n-1)^{2n} = 2(8n-1)^{2n+1}$ (это очевидно). Учтя (24), имеем $2(8n)(8n-1)^{2n} > 2(8n-1)^{2n+1} > (8n+1)^{2n+1}$, из чего следует верность утверждения и для всех $n \geqslant 2$. □

Предложение 6a. *Для любого целого $s \geqslant 3$ имеет место*

$$4s \geqslant 3C^1_{s+1}. \qquad (28)$$

Доказательство: По условию имеем $s \geqslant 3$. Прибавив к обеим его частям $3s$, получим $4s \geqslant 3(s+1)$, что по сути и есть искомое (28). Легко убеждаемся, что равенство в (28) имеет место только при $s = 3$. □

Предложение 7a. *Для любых целых нечетного $q \geqslant 3$ и $1 \leqslant m < q/2$ имеет место*

$$4qC^{2m}_{q+1} > 3C^{2m+1}_{q+1}.$$

Доказательство: Подставив в (28) q вместо s и сложив получившееся от подстановки нестрогое неравенство с $2m(4q+3) > 0$ (при $q \geqslant 3$ и $1 \leqslant m < q/2$ оно очевидно верно), получим: $2m(4q+3) + 4q > 3(q+1)$. Обе части умножим на $A = \frac{(q+1)!}{(2m+1)![(q-2m)+1]!}$, где $k! = 1 \times 2 \times 3 \ldots (k-1)k$; поскольку при $q \geqslant 3$ и $1 \leqslant m < q/2$ есть $A > 0$, то, так или иначе, получим $A\{2m(4q+3) + 4q - 3(q+1)\} > 0$. Выполнив преобразование в фигурных скобках, будем иметь $A\{4q(2m+1) - 3[(q-2m)+1]\} > 0$. После открытия этих скобок и упрощений, так или иначе, получим $4q \times \frac{(q+1)!}{(2m)![(q-2m)+1]!} > 3 \times \frac{(q+1)!}{(2m+1)!(q-2m)!}$, что есть требуемое, так как:
$\frac{(q+1)!}{(2m)![(q-2m)+1]!} = \frac{(q+1)!}{(2m)![(q+1)-2m]!} = C^{2m}_{q+1}$
и $\frac{(q+1)!}{(2m+1)!(q-2m)!} = \frac{(q+1)!}{(2m+1)![(q+1)-(2m+1)]!} = C^{2m+1}_{q+1}$. □

Предложение 8a. *Для любого целого нечетного $q \geqslant 3$ имеет место*

$$2(4q-1)^{q+1} > (4q+1)^{q+1}.$$

Доказательство: Достаточно убедиться в верности:

$$2(4q-1)^{q+1} - (4q+1)^{q+1} > 0. \qquad (29)$$

С этой целью дважды воспользуемся формулами бинома Ньютона для четных степеней. Применяя их, по отдельности получаем:

$$2(4q-1)^{q+1} = 2(4q)^{q+1} - 2C_{q+1}^{1}(4q)^{q} + \ldots + \\ + 2C_{q+1}^{2m}(4q)^{q-2m+1} - 2C_{q+1}^{2m+1}(4q)^{q-2m} + \ldots + 2,$$

$$(4q+1)^{q+1} = (4q)^{q+1} + C_{q+1}^{1}(4q)^{q} + \ldots + \\ + C_{q+1}^{2m}(4q)^{q-2m+1} + C_{q+1}^{2m+1}(4q)^{q-2m} + \ldots + 1,$$

где при фиксированном нечетном $q \geqslant 3$ целое m последовательно пробегает все значения в границах $1 \leqslant m < q/2$. Согласно знаку „-"(минус) между степенями в (29) найдем разность правых частей предпоследнего и последнего равенств; по завершении действия получим:

$$(4q)^{q}[4q - 3C_{q+1}^{1}] + \ldots + (4q)^{q-2m}[4qC_{q+1}^{2m} - 3C_{q+1}^{2m+1}] + \ldots + 1. \tag{30}$$

Осталось показать, что при нечетном $q \geqslant 3$ и целом $1 \leqslant m < q/2$ многочлен (30) положителен. Действительно, при этих значениях для q и m все сомножители за пределами квадратных скобок в (30), очевидно, положительны. По утверждению предложения **6a** неотрицательна разность в крайних слева квадратных скобках. По утверждению предложения **7a** положительны разности в квадратных скобках у всех $(q-1)/2$ внутренних членов (30). Из наведенного следует: при $q \geqslant 3$ многочлен(30) положителен. А это далее влечет верность (29)(ибо по преобразованию (30) и левая часть (29) тождественно равны). По вводному замечанию вправе заключить: наше утверждение истинно. □

Предложение 9a. *Для любого целого $k \geqslant 2$ имеет место*

$$2(4k)(4k-1)^{k} > (4k+1)^{k+1}. \tag{31}$$

Доказательство: Проведем его двумя раздельными этапами; на *первом* этапе докажем утверждение для нечетных $k \geqslant 3$, на *втором* – для четных $k \geqslant 2$. *Первый* этап: если k нечетное $\geqslant 3$, то, с одной стороны, по утверждению предложения **8a** имеем $2(4k-1)^{k+1} > (4k+1)^{k+1}$, с другой стороны, имеем такое: $2(4k)(4k-1)^{k} > 2(4k-1)(4k-1)^{k} = 2(4k-1)^{k+1}$ (его верность очевидна). Из последних двух соотношений теперь следует $2(4k)(4k-1)^{k} > 2(4k-1)^{k+1} > (4k+1)^{k+1}$, откуда вытекает истинность утверждения, в частности, для нечетных $k \geqslant 3$. *Второй* этап: если число k четное $\geqslant 2$, то стоит в (27) положить $2n = k$, так сразу получим (31). Таким образом, утверждение верно, в частности, для четных $k \geqslant 2$. По результатам двух этапов заключаем: утверждение истинно. □

Дополнения к II. 2.

Доказательство *Основного утверждения для случаев подпункта 3 от противного*: Предположим, что в рамках условий подпункта **3** существует примитивная тройка $(x,\, y,\, z)$ с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти целые числа x, y, z, p

и t, обозначив буквами a, b, c, h и j, соответственно. То есть, исходя из принятого(в рамках данного рассмотрения) предположения о *ложности* Основного утверждения, для некоторого случая подпункта **3** имеем:

$$b^h + a^h = c^h.$$

Так как при h тройка $(a,\ b,\ c)$ есть примитивное решение выписанного уравнения, то в силу утверждения предложения **X** существуют такие пары целых чисел $(u_0,\ v_0)$,$(u_1,\ v_1)$,$(u_2,\ v_2)$, состоящие из взаимно простых не делящихся на h чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll} 1\prime)\ \ b + a = u_0^h, & 4\prime)\ \ \dfrac{b^h + a^h}{b + a} = v_0^h, & 7\prime)\ \ c = u_0 v_0, \\ 2\prime)\ \ c - a = u_1^h, & 5\prime)\ \ \dfrac{c^h - a^h}{c - a} = v_1^h, & 8\prime)\ \ b = u_1 v_1, \\ 3\prime)\ \ c - b = h^{jh-1} u_2^h, & 6\prime)\ \ \dfrac{c^h - b^h}{c - b} = h v_2^h, & 9\prime)\ \ a = h^j u_2 v_2. \end{array}\right\} \qquad (32)$$

Сейчас мы намерены из 4$\prime$) в (32) извлечь

$$a^{h-1} < v_0^h. \qquad (33)$$

Распишем указанное равенство так:

$$\frac{b^h + a^h}{b + a} = b^{h-1} - b^{h-2}a + \ldots + b^{(h-1)-2m}a^{2m} - b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m+1} +$$
$$+ \ldots + a^{h-1} = V + a^{h-1} = v_0^h. \qquad (34)$$

Остаётся, как видим, убедиться, что числовое значение многочлена V положительно. Действительно, многочлен V можно переписать так:

$$V = b^{h-2}(b - a) + \ldots + b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m}(b - a) + \ldots =$$
$$= (b - a)(b^{h-2} + \ldots + b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m} + \ldots) = (b - a)W.$$

Последнее показывает, что при фиксированных a, b и h числовое значение W положительно, и, ввиду $b > a$(верно по условию), есть $b - a > 0$. Отсюда вывод: $V > 0$. И теперь, по выше обусловленному, из (34), т. е. из 4$\prime$) в (32), следует (33).

Далее мы намерены из (33) извлечь

$$\left(\frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h. \qquad (35)$$

Для этого в (4) положим $A = h^{jh-1}u_2^h$, $B = u_1^h$, $C = u_0^h$ и получим:

$$\frac{u_0^h - u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2} - h^{jh-1}u_2^h = \frac{u_0^h + u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2} - u_1^h = u_0^h -$$
$$- \frac{u_0^h + u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2} = \frac{u_0^h + u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2} + \frac{u_0^h - u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2} -$$
$$- \frac{u_0^h + u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2} = \frac{u_0^h + u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2} - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h = u_0^h - h^{jh-1}u_2^h -$$
$$- \frac{u_0^h + u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2} = u_0^h - u_1^h - \frac{u_0^h - u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2} =$$
$$= \frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}. \qquad (36)$$

Из 1′), 2′), 3′) в (32) также находим, что
$a = \frac{u_0^h - u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2}, b = \frac{u_0^h + u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}, c = \frac{u_0^h + u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{2}$ (37)
и заменяя дробные выражения в (36) соответствующими числами a, b, c из (37), получаем тождественные равенства:

$$a - h^{jh-1}u_2^h = b - u_1^h = u_0^h - c = b + a - c = c - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h =$$
$$= u_0^h - h^{jh-1}u_2^h - b = u_0^h - u_1^h - a = \frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}. \qquad (38)$$

Поскольку $b + a - c > 0$ (так как по утверждению предложения **A** выполнено $b + a > c$) и $h^{jh-1}u_2^h > 0$ (ведь по условию есть $c > b$ и значит по 3′) в (32) также есть $h^{jh-1}u_2^h = c - b > 0$), то из (38) следует
$a = h^{jh-1}u_2^h + \frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}$, где в правой части слагаемые положительны. Теперь (33) можно записать так: $\left(h^{jh-1}u_2^h + \frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h$. Если левую часть последнего расписать по формуле бинома Ньютона и от полученного многочлена отбросить $h - 1$ первых членов, то по контексту есть: $\left(\frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}\right)^{h-1} < \left(h^{jh-1}u_2^h + \frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h$. Отсюда следует искомое (35).

Здесь не лишним будет отметить, что примитивное решение (a, b, c) при фиксированных h и j только единожды может получиться из (37). Действительно, числа u_0, u_1, u_2 однозначно определены числами a, b, c, h и j, так как имеем: $u_2 = \frac{\sqrt[h]{h(c-b)}}{h^j}$, $u_1 = \sqrt[h]{c - a}$, $u_0 = \sqrt[h]{b + a}$.
В силу примитивности тройки (a, b, c) из последних равенств следует также, что числа u_0, u_1, u_2 попарно взаимно просты и положительны, а произведение $u_0u_1u_2$ четно.

Очередной шаг(важный шаг!) состоит в обосновании того, что для входящих в (35) чисел u_0, u_1, u_2, h и j:

a) *имеет место* $\sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)} > 0$;

b) *имеет место* $u_0 - \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)} \geqslant 0$.

Обоснуем условие a). Поскольку фиксированное $h (h \geqslant 3)$ является нечетным, то на основании известных теорем, а именно: 1) есть $\sqrt[2n+1]{d} > 0$, если

$d > 0$ и 2) есть $\sqrt[2n+1]{d} < 0$, если $d < 0$, достаточно лишь показать, что имеет место: $4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h) > 0$. А это на самом деле так, поскольку при $h \geqslant 3$ есть $h-1 > 0$ и при исходном условии $c > b > a$ с учетом 2/) и 3/) в (32) есть $u_1^h + h^{jh-1}u_2^h = (c-a)+(c-b) > 0$. Этим показана выполнимость условия a). Обоснуем условие b). Припоминаем, что по *рассмотрению* для доказываемого подпункта **3** выполняется:
$\sqrt[h]{b+a} \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]}$. Учтя равенства 1/), 2/), 3/) в (32), получим $u_0 \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)}$, откуда следует верность b).

Теперь осуществим равновеликую замену в (35). Для этого из тождеств (38) извлечем: $u_0^h - c = c - (u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)$. Подменив в нём c произведением $u_0 v_0$ (см. 7/) в (32)) и найдя затем число v_0, получим равенство:

$$v_0 = \frac{u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{u_0}}{2}$$

(в знаменателе $u_0 \neq 0$ — это установлено выше).
Желанная с его участием замена в (35), наконец-то, даст:

$$\left(\frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h)}{2}\right)^{h-1} < \left(\frac{u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{u_0}}{2}\right)^h.$$

Тем самым мы вплотную приблизились к моменту истины. Действительно, если положить: $l = \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)}$, $k = h-1$, $r = u_0 - \sqrt[h]{4(h-1)(u_1^h + h^{jh-1}u_2^h)}$, где в соответствии с пунктами a), b) $l > 0$, $r \geqslant 0$ и *по рассмотрению* также k — целое $\geqslant 2$, то в силу утверждения теоремы **E** истинным является неравенство

$$\left(\frac{u_0^h - u_1^h - h^{jh-1}u_2^h}{2}\right)^{h-1} > \left(\frac{u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + h^{jh-1}u_2^h}{u_0}}{2}\right)^h.$$

Налицо противоречие. Значит вводное предположение ошибочно. В силу произвольности выбора примитивного решения $(x,\ y,\ z)$ уравнения (2) при условиях подпункта **3** заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев подпункта* **3**. □

Доказательство *Основного утверждения для случаев подпункта **5** от противного*: Предположим, что в рамках условий подпункта **5** существует примитивная тройка $(x,\ y,\ z)$ с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти целые числа x, y, z, p и t, обозначив буквами a, b, c, h и j, соответственно. То есть, исходя из принятого(в рамках данного рассмотрения) предположения о *ложности* Основного утверждения, для некоторого случая подпункта **5** имеем:

$$b^h + a^h = c^h.$$

Так как при h тройка $(a,\ b,\ c)$ есть примитивное решение выписанного уравнения, то в силу утверждения предложения **Y** существуют такие пары целых чисел $(u_0,\ v_0)$,$(u_1,\ v_1)$,$(u_2,\ v_2)$, состоящие из взаимно простых не делящихся на h чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll}
1\prime)\ b+a=u_0^h, & 4\prime)\ \dfrac{b^h+a^h}{b+a}=v_0^h, & 7\prime)\ c=u_0v_0,\\
2\prime)\ c-a=h^{jh-1}u_1^h, & 5\prime)\ \dfrac{c^h-a^h}{c-a}=hv_1^h, & 8\prime)\ b=h^ju_1v_1,\\
3\prime)\ c-b=u_2^h, & 6\prime)\ \dfrac{c^h-b^h}{c-b}=v_2^h, & 9\prime)\ a=u_2v_2.
\end{array}\right\} \qquad (39)$$

Сейчас мы намерены из 4$\prime$) в (39) извлечь

$$a^{h-1} < v_0^h. \qquad (40)$$

Распишем указанное равенство так:

$$\frac{b^h+a^h}{b+a}=b^{h-1}-b^{h-2}a+\ldots+b^{(h-1)-2m}a^{2m}-b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m+1}+$$
$$+\ldots+a^{h-1}=V+a^{h-1}=v_0^h. \qquad (41)$$

Остаётся, как видим, убедиться, что числовое значение многочлена V положительно. Действительно, многочлен V можно переписать так:

$$V=b^{h-2}(b-a)+\ldots+b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m}(b-a)+\ldots=$$
$$=(b-a)(b^{h-2}+\ldots+b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m}+\ldots)=(b-a)W.$$

Последнее показывает, что при фиксированных a, b и h числовое значение W положительно, и, ввиду $b>a$(верно по условию), есть $b-a>0$. Отсюда вывод: $V>0$. И теперь, по выше обусловленному, из (41), т. е. из 4$\prime$) в (39), следует (40).

Далее мы намерены из (40) извлечь

$$\left(\frac{u_0^h-h^{jh-1}u_1^h-u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h. \qquad (42)$$

Для этого в (4) положим $A=u_2^h$, $B=h^{jh-1}u_1^h$, $C=u_0^h$ и получим:

$$\frac{u_0^h-h^{jh-1}u_1^h+u_2^h}{2}-u_2^h=\frac{u_0^h+h^{jh-1}u_1^h-u_2^h}{2}-h^{jh-1}u_1^h=u_0^h-$$
$$-\frac{u_0^h+h^{jh-1}u_1^h+u_2^h}{2}=\frac{u_0^h+h^{jh-1}u_1^h-u_2^h}{2}+\frac{u_0^h-h^{jh-1}u_1^h+u_2^h}{2}-$$
$$-\frac{u_0^h+h^{jh-1}u_1^h+u_2^h}{2}=\frac{u_0^h+h^{jh-1}u_1^h+u_2^h}{2}-h^{jh-1}u_1^h-u_2^h=u_0^h-u_2^h-$$
$$-\frac{u_0^h+h^{jh-1}u_1^h-u_2^h}{2}=u_0^h-h^{jh-1}u_1^h-\frac{u_0^h-h^{jh-1}u_1^h+u_2^h}{2}=$$
$$=\frac{u_0^h-h^{jh-1}u_1^h-u_2^h}{2}. \qquad (43)$$

Из 1′), 2′), 3′) в (39) также находим, что
$a = \frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h + u_2^h}{2}$, $b = \frac{u_0^h + h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}$, $c = \frac{u_0^h + h^{jh-1}u_1^h + u_2^h}{2}$ (44)
и заменяя дробные выражения в (43) соответствующими числами a, b, c из (44), получаем тождественные равенства:

$$a - u_2^h = b - h^{jh-1}u_1^h = u_0^h - c = b + a - c = c - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h =$$

$$= u_0^h - u_2^h - b = u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - a = \frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}. \qquad (45)$$

Поскольку $b + a - c > 0$ (так как по утверждению предложения **A** выполнено $b + a > c$) и $u_2^h > 0$ (ведь по условию есть $c > b$ и значит по 3′) в (39) также есть $u_2^h = c - b > 0$), то из (45) следует
$a = u_2^h + \frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}$, где в правой части оба слагаемых положительны. Теперь (40) можно записать так: $\left(u_2^h + \frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h$. Если левую часть этого неравенства расписать по формуле бинома Ньютона и от полученного многочлена отбросить $h-1$ первых членов(положительных), то по контексту есть: $\left(\frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < \left(u_2^h + \frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < v_0^h$. Отсюда следует искомое (42).

Здесь не лишним будет отметить, что примитивное решение $(a,\ b,\ c)$ при фиксированных h и j только единожды может получиться из (44). Действительно, числа u_0, u_1, u_2 однозначно определены числами a, b, c, h и j, так как имеем: $u_2 = \sqrt[h]{c-b}$, $u_1 = \frac{\sqrt[h]{h(c-a)}}{h^j}$, $u_0 = \sqrt[h]{b+a}$.
В силу примитивности тройки $(a,\ b,\ c)$ из последних равенств следует также, что числа u_0, u_1, u_2 попарно взаимно просты и положительны, а произведение $u_0u_1u_2$ четно.

Очередной шаг(важный шаг!) состоит в обосновании того, что для входящих в (42) чисел u_0, u_1, u_2, h и j:
a) *имеет место* $\sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)} > 0$;
b) *имеет место* $u_0 - \sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)} \geqslant 0$.
Обоснуем условие a). Поскольку фиксированное $h(h \geqslant 3)$ является нечетным, то на основании известных теорем, а именно: 1) есть $\sqrt[2n+1]{d} > 0$, если $d > 0$ и 2) есть $\sqrt[2n+1]{d} < 0$, если $d < 0$, достаточно лишь показать, что имеет место: $4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h) > 0$. А это на самом деле так, поскольку при $h \geqslant 3$ есть $h - 1 > 0$ и при исходном условии $c > b > a$ с учетом 2′) и 3′) в (39) есть $h^{jh-1}u_1^h + u_2^h = (c-a) + (c-b) > 0$. Этим показана выполнимость условия a). Обоснуем условие b). Припоминаем, что по *рассмотрению* для доказываемого подпункта **5** выполняется:
$\sqrt[h]{b+a} \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]}$. Учтя равенства 1′), 2′), 3′) в (39), получим $u_0 \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)}$, откуда следует верность b).

Теперь осуществим равновеликую замену в (42). Для этого из тождеств (45) извлечем: $u_0^h - c = c - (h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)$. Подменив в нём c произведением u_0v_0 (см. 7′) в (39)) и найдя затем число v_0, получим равенство:
$v_0 = \frac{u_0^{h-1} + \frac{h^{jh-1}u_1^h + u_2^h}{u_0}}{2}$

(в знаменателе $u_0 \neq 0$ — это установлено выше).
Желанная с его участием замена в (42), наконец-то, даст:
$\left(\frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < \left(\frac{u_0^{h-1} + \frac{h^{jh-1}u_1^h + u_2^h}{u_0}}{2}\right)^h.$

Тем самым мы вплотную приблизились к моменту истины. Действительно, если положить: $l = \sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)}$, $k = h-1$, $r = u_0 - \sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)}$, где в соответствии с пунктами a), b) $l > 0$, $r \geqslant 0$ и *по рассмотрению* также k — целое $\geqslant 2$, то в силу утверждения теоремы **E** истинным является неравенство
$\left(\frac{u_0^h - h^{jh-1}u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} > \left(\frac{u_0^{h-1} + \frac{h^{jh-1}u_1^h + u_2^h}{u_0}}{2}\right)^h.$

Налицо противоречие. Значит вводное предположение ошибочно. В силу произвольности выбора примитивного решения $(x,\ y,\ z)$ уравнения (2) при условиях подпункта **5** заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев подпункта* **5**. □

Д о к а з а т е л ь с т в о *Основного утверждения для случаев подпункта **7** от противного*: Предположим, что в рамках условий подпункта **7** существует примитивная тройка $(x,\ y,\ z)$ с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти целые числа x, y, z, p и t, обозначив буквами a, b, c, h и j, соответственно. То есть, исходя из принятого(в рамках данного рассмотрения) предположения о *ложности* Основного утверждения, для некоторого случая подпункта **7** имеем:
$$b^h + a^h = c^h.$$
Так как при h тройка $(a,\ b,\ c)$ есть примитивное решение выписанного уравнения, то в силу утверждения предложения **Z** существуют такие пары целых чисел $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$, состоящие из взаимно простых не делящихся на h чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll} 1\prime)\ \ b+a = h^{jh-1}u_0^h, & 4\prime)\ \ \dfrac{b^h+a^h}{b+a} = hv_0^h, & 7\prime)\ \ c = h^j u_0 v_0, \\ 2\prime)\ \ c-a = u_1^h, & 5\prime)\ \ \dfrac{c^h-a^h}{c-a} = v_1^h, & 8\prime)\ \ b = u_1 v_1, \\ 3\prime)\ \ c-b = u_2^h, & 6\prime)\ \ \dfrac{c^h-b^h}{c-b} = v_2^h, & 9\prime)\ \ a = u_2 v_2. \end{array}\right\} \quad (46)$$

Сейчас мы намерены из $4\prime)$ в (46) извлечь
$$a^{h-1} < hv_0^h. \quad (47)$$
Распишем указанное равенство так:
$$\frac{b^h+a^h}{b+a} = b^{h-1} - b^{h-2}a + \ldots + b^{(h-1)-2m}a^{2m} - b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m+1} + $$
$$+ \ldots + a^{h-1} = V + a^{h-1} = hv_0^h. \quad (48)$$

Остаётся, как видим, убедиться, что числовое значение многочлена V положительно. Действительно, многочлен V можно переписать так:
$V = b^{h-2}(b-a) + \ldots + b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m}(b-a) + \ldots =$
$= (b-a)(b^{h-2} + \ldots + b^{(h-1)-(2m+1)}a^{2m} + \ldots) = (b-a)W.$
Последнее показывает, что при фиксированных a, b и h числовое значение W положительно и ввиду $b > a$(верно по условию), есть $b - a > 0$. Отсюда вывод: $V > 0$. По выше обусловленному теперь из (48), т. е. из 4′) в (46), следует (47).

Далее мы намерены из (47) извлечь

$$\left(\frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < hv_0^h. \tag{49}$$

Для этого в (4) положим $A = u_2^h$, $B = u_1^h$, $C = h^{jh-1}u_0^h$ и получим

$$\frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h + u_2^h}{2} - u_2^h = \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h - u_2^h}{2} - u_1^h = h^{jh-1}u_0^h -$$
$$- \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h + u_2^h}{2} = \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h - u_2^h}{2} + \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h + u_2^h}{2} -$$
$$- \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h + u_2^h}{2} = \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h + u_2^h}{2} - u_1^h - u_2^h = h^{jh-1}u_0^h - u_2^h -$$
$$- \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h - u_2^h}{2} = h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h + u_2^h}{2} =$$
$$= \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}. \tag{50}$$

Из 1′), 2′), 3′) в (46) также находим, что
$a = \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h + u_2^h}{2}, \quad b = \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h - u_2^h}{2}, \quad c = \frac{h^{jh-1}u_0^h + u_1^h + u_2^h}{2}$ (51)
и заменяя дробные выражения в (50) соответствующими числами a, b, c из (51), получаем тождественные равенства

$$a - u_2^h = b - u_1^h = h^{jh-1}u_0^h - c = b + a - c = c - u_1^h - u_2^h =$$
$$= h^{jh-1}u_0^h - u_2^h - b = h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - a = \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}. \tag{52}$$

Поскольку $b + a - c > 0$ (так как по утверждению предложения **A** выполнено $b + a > c$) и $u_2^h > 0$ (ведь по условию есть $c > b$ и значит по 3′) в (46) есть $u_2^h = c - b > 0$), то из (52) следует $a = u_2^h + \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}$, где в правой части оба слагаемых положительны. Теперь (47) можно записать так: $\left(u_2^h + \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < hv_0^h$. Если левую часть этого неравенства расписать по формуле бинома Ньютона и от полученного многочлена отбросить $h - 1$ первых положительных членов, то по контексту есть

$$\left(\frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < \left(u_2^h + \frac{h^{jh-1}u_0^h - u_1^h - u_2^h}{2}\right)^{h-1} < hv_0^h.$$

Отсюда следует искомое (49).

Здесь не лишним будет отметить, что примитивное решение (a, b, c) при фиксированных h и j только единожды может получиться из (51). Действительно, числа u_0, u_1, u_2 однозначно определены числами a, b, c, h и j, так как имеем: $u_2 = \sqrt[h]{c-b}$, $u_1 = \sqrt[h]{c-a}$, $u_0 = \frac{\sqrt[h]{h(b+a)}}{h^j}$.
В силу примитивности тройки (a, b, c) из последних равенств следует также, что числа u_0, u_1, u_2 попарно взаимно просты и положительны, а произведение $u_0u_1u_2$ четно.

Очередной шаг(важный шаг!) состоит в обосновании того, что для входящих в (49) чисел u_0, u_1, u_2, h и j:

a) *имеет место* $\sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)} > 0$;

b) *имеет место* $h^j u_0 - \sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)} \geqslant 0$.

Обоснуем пункт a). Поскольку h нечетно $\geqslant 3$, то на основании известных теорем, а именно: 1) есть $\sqrt[2n+1]{d} > 0$, если $d > 0$ и 2) есть $\sqrt[2n+1]{d} < 0$, если $d < 0$, достаточно лишь показать, что $4h(h-1)(u_1^h + u_2^h) > 0$. А это на самом деле так, поскольку при $h \geqslant 3$ есть $h - 1 > 0$ и при исходном условии $c > b > a$ с учетом 2′) и 3′) в (46) есть $u_1^h + u_2^h = (c-a) + (c-b) > 0$. Этим показана *состоятельность* условия a). Обоснуем условие b). Припоминаем, что по *рассмотрению* для доказываемого подпункта **7** выполняется $\sqrt[h]{b+a} \geqslant \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]}$. Домножив здесь обе части на $\sqrt[h]{h}$ и учтя равенства 1′), 2′), 3′) в (46), получим $h^j u_0 \geqslant \sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)}$, откуда следует верность условия b).

Теперь осуществим равновеликую замену в (49). Для этого из тождеств (52) извлечем $h^{jh-1}u_0^h - c = c - (u_1^h + u_2^h)$. Подменив в нём c произведением $h^j u_0 v_0$ (см. 7′) в (46)) и найдя затем число v_0, получим равенство

$$v_0 = \frac{h^{j(h-1)-1}u_0^{h-1} + \frac{u_1^h + u_2^h}{h^j u_0}}{2}$$

(в знаменателе $u_0 \neq 0$ — это установлено выше).
Желанная с его участием замена в (49) и умножение затем(в обновленном неравенстве) обеих частей на h^{h-1}, окончательно даст

$$\left(\frac{(h^j u_0)^h - h(u_1^h + u_2^h)}{2}\right)^{h-1} < \left(\frac{(h^j u_0)^{h-1} + \frac{h(u_1^h + u_2^h)}{h^j u_0}}{2}\right)^h.$$

Тем самым мы вплотную приблизились к моменту истины. Действительно, если положить: $r = h^j u_0 - \sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)}$, $k = h - 1$, $l = \sqrt[h]{4h(h-1)(u_1^h + u_2^h)}$, где в соответствии с пунктами a), b) $l > 0$, $r \geqslant 0$ и *по рассмотрению* также k — целое четное $\geqslant 2$, то в силу утверждения теоремы **E** истинным является неравенство

$$\left(\frac{(h^j u_0)^h - h(u_1^h + u_2^h)}{2}\right)^{h-1} > \left(\frac{(h^j u_0)^{h-1} + \frac{h(u_1^h + u_2^h)}{h^j u_0}}{2}\right)^h.$$

Налицо противоречие. Значит вводное предположение ошибочно. В силу произвольности выбора примитивного решения $(x,\ y,\ z)$ уравнения (2) при условиях подпункта **7** заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев подпункта* **7**. □

Дополнения к III. 3.

III.3. Доказательство *Основного утверждения для случаев подпункта* 6 (гипотетическое): Предположим, что в рамках условий пп. 6 существует примитивная тройка $(x,\ y,\ z)$ с четным произведением xyz, удовлетворяющая уравнению (2). Зафиксируем эти целые числа x, y, z, p и t, обозначив буквами a, b, c, h и j, соответственно. То есть, для некоторого случая пп. 6 имеем:

$$b^h + a^h = c^h$$

и значит, по предложению Y существуют пары $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$, состоящие из взаимно простых не делящихся на h целых чисел, что

$$\left.\begin{array}{lll} 1\prime)\ b+a=u_0^h, & 4\prime)\ \dfrac{b^h+a^h}{b+a}=v_0^h, & 7\prime)\ c=u_0v_0, \\ 2\prime)\ c-a=h^{jh-1}u_1^h, & 5\prime)\ \dfrac{c^h-a^h}{c-a}=hv_1^h, & 8\prime)\ b=h^ju_1v_1, \\ 3\prime)\ c-b=u_2^h, & 6\prime)\ \dfrac{c^h-b^h}{c-b}=v_2^h, & 9\prime)\ a=u_2v_2. \end{array}\right\} \qquad (53)$$

Судя по крайним колонкам (53), ясно, что из четности одного из попарно взаимно простых чисел a, b, c (имеем по условию), взаимной простоты чисел в парах $(u_0,\ v_0)$, $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$ (выведена из допущения) и нечетности h вытекает *четность* только одного из чисел u_0, u_1, u_2 и *нечетность* чисел v_0, v_1, v_2 (заключение – 'наводной мостик' к гип. 3). Следуя описанию I. 5 главы I, остается рассмотреть варианты: u_0 *четно* и *нечетно.*

Пусть гипотеза 3 истинна. Пусть u_0 нечетно. Поскольку h делит h^ju_1, то $h^ju_1 \geqslant 3$, а следовательно, есть $h^{j(h-2)}u_1^{h-2} \geqslant h^ju_1 \geqslant 3$ и согласно леммы 2 имеем $\sqrt[h]{4h} < \left(h^ju_1\right)^{h-2}$. Отсюда легко получим

$$4h < \left(h^ju_1\right)^{h(h-2)}. \qquad (54)$$

Так как $h(h-2) < h(h-1)$ (это очевидно) и $jh(h-2) < (jh-1)(h-1)$ (с учетом $j \geqslant 1$, имеем: $(jh-1)(h-1) - jh(h-2) = h(j-1)+1 \geqslant 1 > 0$), то $h^{jh(h-2)}u_1^{h(h-2)} < h^{(jh-1)(h-1)}u_1^{h(h-1)}$ и (54) даст $4h < \left(h^{jh-1}u_1^h\right)^{h-1}$. Учтя очевидные: $\left(h^{jh-1}u_1^h\right)^{h-1} < \left(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h\right)^{h-1}$, $4(h-1) < 4h$, получим $4(h-1) < \left(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h\right)^{h-1}$ или $\sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)} < h^{jh-1}u_1^h + u_2^h$. Помня о нечетности u_0 и 'наводном мостике', воспользуемся гипотезой 3; полагая в ней $x=a$, $y=b$, $z=c$, $p=h$ и учтя 1′), 2′), 3′) в (53), окончательно получим:

$$\sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)} < h^{jh-1}u_1^h + u_2^h = (c-a)+(c-b) = \sqrt[h]{b+a} = u_0.$$

Здесь противоречие, так как для пп. 6 изначально выполняется

$$\sqrt[h]{b+a} < \sqrt[h]{4(h-1)[(c-a)+(c-b)]} = \sqrt[h]{4(h-1)(h^{jh-1}u_1^h + u_2^h)}.$$

Пусть u_0 четно. Тогда u_1, u_2 нечетны. А так как: $u_0 = \sqrt[h]{b+a}$ =целое, $h^j u_1 = \sqrt[h]{h(c-a)}$=целое, $u_2 = \sqrt[h]{c-b}$ =целое (см. 1$\prime$), 2$\prime$), 3$\prime$) в (53), соответственно) и одновременно есть: $\frac{c}{u_0} = \frac{c}{\sqrt[h]{b+a}} = v_0$ =целое нечетное, $\frac{b}{h^j u_1} = \frac{b}{\sqrt[h]{h(c-a)}} = v_1$ =целое нечетное, $\frac{a}{u_2} = \frac{a}{\sqrt[h]{c-b}} = v_2$ =целое нечетное, (см. 7$\prime$), 8$\prime$), 9$\prime$) в (53), соответственно), то заключение гипотезы 3 (а прочие ее посылки имеют место) однозначно указывает, что u_0, вопреки нашему рассмотрению, обязано быть нечетным. Таким образом, доказана несовместность равенств 1$\prime$), 2$\prime$), 3$\prime$), 7$\prime$), 8$\prime$), 9$\prime$) в (53) при четном u_0.

Подытожим проделанное. Сперва, из допущения о ложности Основного утверждения при условиях пп. 4, было выведено существование пар целых чисел (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), при которых одновременно имеют место 9 равенств в (53). Затем, приведением к противоречию, четко показано, что при условиях пп. 4 вообще не существует пар целых чисел (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), удовлетворяющих хотя бы 6-ти равенствам из (53). Таким образом, получено два взаимоисключающих умозаключения. С посыланием на этот факт, констатируем: вводное предположение ошибочно. Учитывая произвольность в выборе решения (x, y, z) уравнения (2) в усл. пп. 6, заключаем: *Основное утверждение истинно для всех случаев пп.* 6 – **конец гипотетического доказательства ОУ для подпункта 6**.